

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ
УКРАЇНИ

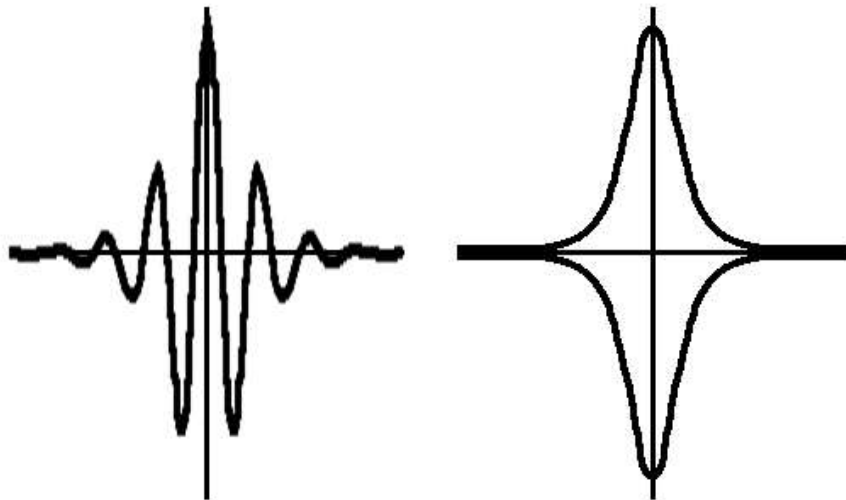
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені В. Н. КАРАЗІНА

О. В. ЛАЗОРЕНКО, Л. Ф. ЧОРНОГОР



НЕЛІНІЙНА
РАДІОФІЗИКА

ЗБІРНИК ЗАДАЧ



Харків 2023

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ
УКРАЇНИ**

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені В. Н. КАРАЗІНА**

О. В. ЛАЗОРЕНКО, Л. Ф. ЧОРНОГОР



**НЕЛІНІЙНА
РАДІОФІЗИКА**

ЗБІРНИК ЗАДАЧ

Підручник

Видання сьоме, виправлене

Харків 2023

УДК 530.18 + 534.1: 550.338

Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Нелінійна радіофізика: Збірник задач. Підручник.
– Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2023. – 170 с.

Представлено основні поняття та співвідношення, приклади розв'язання типових задач, а також задачі для самостійного розв'язання з відповідями.

Для студентів старших курсів фізичних спеціальностей університетів.

35 іл., 5 табл., 66 бібл.

Lazorenko O. V., Chernogor L. F. Nonlinear Radio Physics: Book of problems.
Handbook. – Kharkiv, Kharkiv V. N. Karazin National University, 2023. – 170 pp.

Basic concepts and relations, examples of the typical problems solving, problems for self-dependent solving with answers are given.

For graduate students of physics and radio physics.

35 Figures, 5 Tables, 66 References.

Рекомендовано вченою радою факультету радіофізики, біомедичної електроніки та комп'ютерних систем Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 1 від 27 січня 2023 р.).

Рецензенти: академік НАН України В. М. Яковенко,
доктор фіз.-мат. наук, професор С. М. Шульга.

ISBN 966-623-434-3

© Харківський національний університет імені
В. Н. Каразіна, 2023

© О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор, 2023



ЗМІСТ

Передмова.....	5
Вступ.....	6
Розділ 1. Коротка характеристика нелінійності, основних явищ і методів нелінійної фізики.....	7
1.1. Нелінійність – універсальна фундаментальна і головна властивість світу.....	7
1.1.1. Вступні відомості.....	7
1.1.2. Про лінійне мислення та лінійне світобачення.....	7
1.1.3. Ази з математики.....	8
1.1.4. Знайомство з нелінійністю.....	9
1.1.5. Основні періоди еволюції уявлень про нелінійність світу.....	10
1.1.6. Приклади нелінійних явищ.....	11
1.1.7. Порядок і хаос.....	19
1.1.8. Нелінійна парадигма.....	24
1.1.9. Роль нелінійних явищ та їх моделей.....	25
1.1.10. Основні особливості нелінійних систем і процесів.....	26
1.1.11. Особливості нелінійного світобачення.....	27
1.1.12. Нелінійність у XXI столітті.....	27
1.2. Загальні відомості про нелінійну фізику, її методи та застосування....	28
1.3. Основні положення нелінійної парадигми.....	32
Розділ 2. Методи нелінійної електродинаміки.....	33
2.1. Основні поняття та співвідношення.....	33
2.2. Приклади.....	39
2.3. Задачі для самостійного розв’язання.....	48
Розділ 3. Ударні хвилі.....	51
3.1. Основні поняття та співвідношення.....	51
3.2. Приклади.....	52
3.3. Задачі для самостійного розв’язання.....	56
Розділ 4. Солітони.....	59
4.1. Основні поняття та співвідношення.....	59
4.2. Приклади.....	61
4.3. Задачі для самостійного розв’язання.....	64

Розділ 5. Когерентна взаємодія хвиль. Нестійкості.....	68
5.1. Основні поняття та співвідношення.....	68
5.2. Приклади.....	70
5.3. Задачі для самостійного розв'язання.....	78
Розділ 6. Нелінійна квантова радіофізика.....	84
6.1. Основні поняття та співвідношення.....	84
6.1.1. Тепловий механізм.....	84
6.1.2. Стрикційний механізм.....	86
6.1.3. Атомний механізм.....	87
6.1.4. Релятивістський механізм.....	88
6.1.5. Вакуумний механізм.....	88
6.1.6. Порівняння механізмів.....	89
6.2. Генерація другої гармоніки.....	90
6.2.1. Вихідні рівняння.....	90
6.2.2. Амплітуда другої гармоніки.....	91
6.3. Задачі для самостійного розв'язання.....	94
Розділ 7. Нелінійні ефекти у плазмі.....	98
7.1. Основні поняття та співвідношення.....	98
7.2. Приклади.....	101
7.3. Задачі для самостійного розв'язання.....	106
Розділ 8. Нелінійні ефекти в іоносферній і космічній плазмі.....	111
8.1. Основні поняття та співвідношення.....	111
8.2. Приклади.....	116
8.3. Задачі для самостійного розв'язання.....	118
Розділ 9. Математичні методи нелінійної статистичної радіофізики.....	123
9.1. Основні поняття та співвідношення.....	123
9.2. Приклади.....	125
9.3. Задачі для самостійного розв'язання.....	130
Розділ 10. Детермінований хаос і самоорганізація.....	132
10.1. Основні поняття та співвідношення.....	132
10.2. Приклади.....	134
10.3. Задачі для самостійного розв'язання.....	137
Література.....	139
1. Основна.....	139
2. Додаткова.....	139
Додаток.....	143
Відповіді.....	147



ПЕРЕДМОВА

Збірник задач із курсу «Нелінійна радіофізика» є першою та вдалою спробою підготовки підручника з цієї дисципліни. Він охоплює всі основні розділи сучасної радіофізики. Збірник написано на високому методичному рівні. На початку кожного розділу стисло даються основні положення теорії та приклади розв'язання типових задач, а потім пропонуються задачі для самостійного розв'язання. Наприкінці збірника наведено відповіді на задачі та деякі довідкові матеріали. Слід додати, що багато задач – оригінальні. Це є заслугою авторів. Декілька слів про авторів.

О. В. Лазоренко – доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри загальної фізики, професор кафедри космічної радіофізики ХНУ імені В. Н. Каразіна – є відомим фахівцем у галузі космічної радіофізики, теорії надширококутових сигналів, нелінійної радіофізики та фрактальної радіофізики. Має великий досвід проведення практичних занять за курсом «Нелінійна радіофізика», останніми роками на фізичному факультеті ХНУ імені В. Н. Каразіна викладає курс «Нелінійна фізика».

Л. Ф. Черногор – доктор фізико-математичних наук, професор, академік АН Вищої освіти України, лауреат Державної премії УРСР, двічі лауреат Премії РМ СРСР, лауреат Премії МВССО СРСР, Заслужений професор ХНУ імені В. Н. Каразіна, Заслужений діяч науки та техніки України, Почесний професор Харбінського інженерного університету (КНР) та університету Ціндао (КНР) – є відомим фахівцем у галузі космічної фізики, нелінійної радіофізики, поширення радіохвиль, дистанційного радіозондування геокосмосу та фізичної екології. За його ініціативи в 1980-ті рр. вперше у колишньому СРСР (як і у дальньому зарубіжжі) на радіофізичному факультеті Харківського державного університету поставлено курс «Нелінійна радіофізика». Курс, що завершує радіофізичну освіту, суттєво розширює його та сприяє формуванню нелінійного мислення, нелінійного підходу до процесів та ефектів.

Навчальний посібник буде дуже корисним при підготовці нових поколінь фахівців для роботи на передньому краї науки.

Науковий редактор
академік НАН України

В. М. Яковенко



ВСТУП

При підготовці збірника задач враховувався досвід читання Л. Ф. Чорногором курсу «Нелінійна радіофізика» обсягом 32 години та проведення авторами практичних занять обсягом 32 годин на радіофізичному факультеті, починаючи з 1980-х рр. Кожен розділ складається з короткого переліку основних понять і співвідношень, корисних під час розв'язання задач, прикладів розв'язання типових задач, а також задач для самостійного розв'язання з відповідями. Укладачі збірника сподівалися, що така структура розділів сприяє навчанню самостійного розв'язання задач, розвиває навички практичного застосування знань, здобутих у лекційному курсі. Зважаючи на малий обсяг практичних занять не всі розділи курсу знайшли відображення у збірнику. Позначення в даному збірнику відповідають лекційному курсові.

Перше видання збірника вийшло 1994 р. Друге, третє, четверте, п'яте та шосте видання – виправлені та доповнені – у 1998, 2008, 2018, 2019 та 2020 рр. відповідно.

Поточне, сьоме, видання також доповнено та розширено.



Розділ 1. КОРОТКА ХАРАКТЕРИСТИКА НЕЛІНІЙНОСТІ, ОСНОВНИХ ЯВИЩ І МЕТОДІВ НЕЛІНІЙНОЇ ФІЗИКИ

Фізика була б нудною, а життя зовсім неможливим, якби всі фізичні явища навколо нас були лінійними. На щастя, ми живемо у нелінійному світі, і якщо лінеаризація прикрашає фізику, то нелінійність робить її захоплюючою.

Професор І. Р. Шен

1.1. Нелінійність – універсальна фундаментальна та головна властивість світу

1.1.1. Вступні відомості

Як народився й еволюціонує наш Всесвіт? Чому кільця Сатурна такі тонкі, але протяжні? Чому активність Сонця змінюється періодично з періодом близько 11 років? Що спричинило загибель динозаврів? Чому нас так лякають сліпучі спалахи блискавок, оглушливі удари грому, шалені землетруси, вулкани, що розбушувалися? Чому під час шторму виникає «дев'ятий вал»? Чому цунамі – така грізна стихія? Чому рельєф снігових заметів хвилястий? Чому у ягуара тіло плямисте, а хвіст смугастий? І що поєднує ці зовсім не пов'язані між собою явища? Виявляється всі вони – результат нелінійності.

1.1.2. Про лінійне мислення та лінійне світобачення

Відстань до найближчої зірки становить чотири світлові роки (а не стількись кілометрів). Для виконання заданого обсягу робіт потрібно скількись людино-днів. Чим більше (в інших випадках, що менше) – тим краще. Ціле складається з частин. Що спільного у цих висловлюваннях? Спільним є те, що рів-

ним змінам однієї (незалежної) величини обов'язково відповідають рівні зміни іншої (залежної) величини. Така поведінка описується лінійною залежністю. Такий спосіб мислення належить до лінійного. Таке світобачення називається лінійним. Лінійне світобачення властиве людині. Воно наочне, воно відповідає «здоровому глузду».

Лінійність передбачає просту пропорційність, графік лінійної функції – пряма лінія. Багато явищ у природі підпорядковуються такій закономірності. У скільки разів змінено параметр будь-якого впливу, у стільки ж раз змінюється результат впливу.

Лінійність передбачає виконання принципу суперпозиції (накладення, додавання). У цьому сенсі лінійність – категорія конструктивна. Знаючи результат дії кожної з двох (або багатьох) сил на тіло заданої маси і користуючись принципом суперпозиції, можна відповісти на запитання: «Як рухатиметься це тіло під дією сумарної сили?». Те саме можна сказати і про дію сумарного електричного або магнітного полів. Приклади можна продовжити.

У природі зустрічаються лінійні процеси, лінійні закономірності та лінійні залежності. Як тепер стало зрозуміло, лінійні закономірності є скоріше винятком. Природа виявилася складнішою. Найчастіше її не вдається задовільно описати в рамках лінійного підходу, лінійного мислення та лінійного світобачення.

1.1.3. Ази з математики

Поняття нелінійності у науку прийшло з математики. Якщо до математичного рівняння шукані величини (функції, їх похідні тощо) входять у першій степені, таке рівняння називається лінійним. У решті випадків ми маємо справу з нелінійними рівняннями.

Ще на світанку цивілізації навчилися розв'язувати лінійне рівняння. Квадратне рівняння вдалося розв'язати в стародавньому Єгипті та в стародавньому Вавілоні. Тільки в середні віки італійці розв'язали спочатку рівняння третьої степені (Н. Тарталья), а потім і рівняння четвертої степені (Л. Ферарі).

У XVII – XVIII ст. сформувалися основні поняття властивості нелінійних функцій. Надалі число досягнень математиків збільшувалося як снігова куля. Найчастіше методи аналізу нелінійних систем і методи розв'язання модельних рівнянь розроблялися стосовно розв'язання практичних задач механіки, фізики та природознавства в цілому.

Добре відомо, що лінійне рівняння має один корінь. Рівняння другої, третьої і т. і. степенів мають два, три і т. і. коренів. Зовсім просте нелінійне рівняння (наприклад, $\lg x = x$) має незліченну кількість розв'язків. Остання властивість нелінійних рівнянь набуває виняткової важливості. Множині розв'язків відповідає множина шляхів еволюції нелінійної системи, тобто такої системи, яка описується нелінійними рівняннями. Одна й та система може піти одним чи якісно іншим шляхом розвитку. Таке роздвоєння «долі» системи проходять у

точках біфуркацій (біфуркація латиною означає роздвоєння). Саму подію для стислості також називають біфуркацією. Яким із шляхів піде нелінійна система «передбачає» математична теорія – теорія катастроф.

1.1.4. Знайомство з нелінійністю

Що таке нелінійність? Нелінійність – це заперечення лінійності, це протилежність. Категорія нелінійності не має сили конструктивізму. Заперечуючи принцип суперпозиції, вона нічого не пропонує натомість.

Нелінійність – поняття дуже ємне, воно має величезну кількість кольорів і градацій. Нелінійний ефект – це ефект, що описується нелінійною залежністю, нелінійним рівнянням. Нелінійна теорія – це теорія, в основі якої лежать нелінійні зв'язки між об'єктами (отже і нелінійні співвідношення), що вона вивчає.

Звідки з'являється нелінійність? Все різноманіття причин нелінійності можна спробувати звести до двох випадків. У першому з них нелінійність є «вродженою», тобто наслідком внутрішніх причин, які відображаються нелінійними рівняннями, що описують стан досить складної системи. У другому випадку нелінійність є «привнесеною». Сюди відносяться системи зі значним енерговмістом та енерговиділенням, високошвидкісні та високотемпературні процеси, коливання та хвилі зі значною амплітудою тощо. І тим, і іншим системам властиві процеси самовпливу, обумовлені наявністю своєрідного зворотного зв'язку.

Ще далеко не всі усвідомили, що ми живемо у нелінійному світі, в якому свої закони. І ці закони зовсім не схожі на звичні лінійні закони. Але навіть серед тих, хто тією чи іншою мірою знайомий із нелінійністю, немає єдиної думки в тому, чим же саме є нелінійність. Одним здається, що це просто гасло. Тоді чому різні процеси у різних природничих науках (фізиці, хімії, біології та ін.), а також в економіці, соціології, медицині, в технічних додатках описуються однаковими чи подібними моделями? Чому ці моделі передбачають схожі кінцеві результати? Так, аналогія є, схожість є – кажуть інші. На думку, нелінійність – це сукупність нелінійних моделей. І не більше. Чому ж нелінійні процеси всюди? Чому їх незрівнянно більше, ніж лінійних? Чи не тому, що лінійні процеси та моделі лише окремий і вкрай “невеликий” граничний випадок нелінійних процесів та моделей? Чим більше ми вивчаємо нелінійні явища та процеси, тим більше розуміємо, що нелінійність багатоліка, що нелінійність невичерпно різноманітна. Нелінійність проявляється у всьому: у зв'язку простого та складного, у великому та малому, у явищах швидкоплинних і тих, час тривання яких є порядком існування Всесвіту, переходах порядок – хаос і хаос – порядок тощо. Все це дозволяє стверджувати, що нелінійність – універсальна, фундаментальна і головна властивість природи, властивість світу. Для всебічного вивчення цієї властивості потрібне сучасне нелінійне мислення, нелінійне світобачення.

1.1.5. Основні періоди еволюції уявлень про нелінійність світу

Уявлення про нелінійність природи, нелінійність науки, що описує природу, формувалися поступово. Умовно можна виділити такі періоди.

Натурфілософський період (XVII – XVIII ст.). Натуралісти вперше зіткнулися з нелінійністю. Для них це була окрема складність у розв'язанні задач.

Класичний період (XIX ст.). Були усвідомлені окремі незвичайні властивості нелінійних явищ, були проведені перші спостереження нелінійних процесів (і, перш за все хвильового типу), отримані перші еталонні нелінійні рівняння та їх точні розв'язки, розроблені наближені методи аналізу деяких нелінійних задач фізики, що спираються на метод збурень.

Протягом цього періоду нелінійні задачі у різних галузях представлялися специфічними і, зазвичай, кожна задача розв'язувалася своїм методом. Нелінійність зазвичай вважалася малою.

Новий період (перша половина XX ст.). В основному було завершено розробку теорії нелінійних коливань. Було усвідомлено, що багато практичних задач є нелінійними. Без їхнього розв'язання було неможливим створення нових технологій. Почала формуватися нелінійна мова, зародилося нелінійне мислення, з'явилися перші школи "нелінійних фізиків". Було висловлено думку, що "майбутні фізичні теорії" будуть нелінійними. Впритул підійшли до використання найпростіших комп'ютерів для розв'язання нелінійних задач. З їхньою допомогою отримані перші нетривіальні результати.

У цілому нині нелінійність досі сприймалася як окрема характеристика об'єктів.

Сучасний період (друга половина XX ст. – початок XXI ст.). Інтенсивно досліджувалися і досліджуються нелінійні явища в різних науках, до яких належать природні, екологічні, технічні, економічні, соціальні та ін. Комп'ютери в числових експериментах дозволили виявити ряд нетривіальних і воістину приголомшливих закономірностей нелінійного світу, що виходять далеко за межі лінійної інтуїції та лінійного світобачення. Виникли міждисциплінарні системи знань – детермінований хаос і синергетика.

Спостерігалися революційні зміни в уявленні про нелінійність світу. Відбулося філософське осмислення уявлень про нелінійність світу. Сформульовано основні положення системної парадигми. Стало зрозумілим, що нелінійність – універсальна та фундаментальна властивість світу. Ця властивість – загальна, вона більш об'ємна, більш різноманітна, ніж властивості нелінійних коливальних і хвильових процесів, ніж властивості детермінованого хаосу або самоорганізації, ніж ті інші властивості, через які нелінійність проявляється.

Автору [5, 57, 59] вдалося сформулювати такі далекосяжні твердження. Поняття нелінійності настільки ж фундаментальне, як фундаментальне поняття матерії, поняття руху (еволюції) матерії. Сама матерія в загальному випадку має розглядатися як нелінійна система. Взагалі, нелінійним є і рух матерії. І ма-

терія, і її еволюція описуються нелінійними співвідношеннями, які відображають нетривіальні процеси в матерії, що рухається.

У автора [5, 58, 59] з'явилися вагомі підстави для висновку про те, що нелінійність – головна властивість світу. Саме вона керує еволюцією світу.

1.1.6. Приклади нелінійних явищ

Багатогранність нелінійності. Найчастіше нелінійність – внутрішня властивість об'єктів і процесів – пов'язана з великим енерговмістом, значним енерговиділенням, високими швидкостями та температурами тощо. Тому не викликає жодних сумнівів, що Великий вибух, народження, життя та смерть галактик та зірок – це нелінійні процеси (рис. 1.1, 1.2, 1.3). Сонячна система є нелінійною, що спричинено, зокрема, нелінійною залежністю сили всесвітнього тяжіння від відстані. Як правило, нелінійними є процеси на Сонці та на планетах, а також усередині них (рис. 1.3, 1.4, 1.5). Більшість процесів на Землі, всередині її та у зовнішніх оболонках – також нелінійні. Сюди належать землетруси, цунамі, вулканізм, вихори в атмосфері й океані, процеси в іоносфері та магнітосфері (рис. 1.6, 1.7, 1.8, 1.9). Процеси гороутворення, формування рельєфу, океаноутворення – нелінійні. Нелінійні також такі явища, як блискавкові розряди, падіння метеоритів, а тим більше комет та астероїдів (рис. 1.10, 1.11, 1.12). Процеси, що відповідають за формування погоди та клімату, зазвичай нелінійні (рис. 1.13, 1.14, 1.15, 1.16). Прикладів існує дуже багато. Як правило, всі катастрофічні явища природи належать до нелінійних. Зрозуміло, нелінійними є й рукотворні катастрофи (рис. 1.17, 1.18).

А як справи з нелінійністю в мікросвіті? Виявляється, вона не оминула, не "обділила" його своєю увагою. Народження, перетворення, взаємодія частинок в мікросвіті являють собою нелінійні процеси.

Таким чином, навколишній світ – нелінійний. Він описується складними нелінійними рівняннями, методи розв'язання яких розвинені значно гірше, ніж лінійних. Часто доводиться використовувати лінеаризацію, тобто перехід від нелінійного до наближеного та простішого лінійного рівняння. Природно, що при цьому «з водою можна виплеснути дитину».

Нелінійний світ має дивовижні властивості, деякі з них будуть згадані нижче. Загалом треба зазначити, що ми дуже мало знаємо про нелінійні явища природи, але ще менше вміємо їх використовувати.

З одним із найкрасивіших проявів нелінійного світу – солітоном – ми познайомимося нижче.

Солітон. Класичним прикладом солітону є біжуча одnogорба поодинокa хвиля на воді. Найбільш яскравий їхній представник – цунамі (див. рис. 1.7). Головною особливістю солітону є незмінність його профілю (тобто виду, обрису) у процесі поширення. Зазвичай, це зумовлено припливом енергії ззовні. Тому така хвиля має місце у відкритих системах. До того ж система має бути нелінійною. Таким чином, солітон – нелінійна поодинокa хвиля.

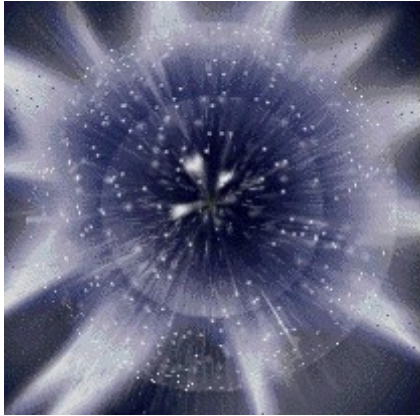


Рис. 1.1. Великий вибух, що породив Всесвіт – найграндіозніше нелінійне явище (модель)



Рис. 1.2. Вибух зірки – надвисокоенергічне нелінійне явище в космосі.



Рис. 1.3. Спалах на Сонці – найсильніше нелінійне явище в Сонячній системі



Рис. 1.4. Велика Червона Пляма в атмосфері Юпітера – найбільший нелінійний вихор (циклон) у Сонячній системі (рис. ліворуч). Під ним знаходиться Біла Пляма – трохи менший вихор. Зіставлення розмірів Великої Червоної Плями та діаметра Землі (рис. праворуч).



Рис. 1.5. Послідовні стадії падіння уламків комети Шумейкерів – Леві 9 на Юпітер 16 – 22 липня 1994 р. Це надпотужне бомбардування призвело до найсильніших нелінійних ефектів в атмосфері та навколопланетному космічному середовищі.



Рис. 1.6. Потужний землетрус – джерело багатьох нелінійних явищ у літосфері, атмосфері і навіть у геокосмосі. На рисунку видно глибокі тріщини від Чуйського землетрусу.



Рис. 1.7. Цунамі – катастрофічне нелінійне явище в океані (морі). Висота поодинокі хвилі біля берега може досягати 50 метрів, а швидкість – 200 м/с.



Рис. 1.8. Виверження вулкана – джерело найсильніших нелінійних явищ у літосфері, атмосфері та геокосмосі.



Рис. 1.9. Нелінійний вихор в океані.



Рис. 1.10. Розряди блискавки супроводжуються цілим комплексом нелінійних явищ в атмосфері і навіть у геокосмосі.



Рис. 1.11. Падіння уламків великого метеориту або астероїда викликає найсильніші нелінійні явища у всіх земних оболонках і геополях (модель).

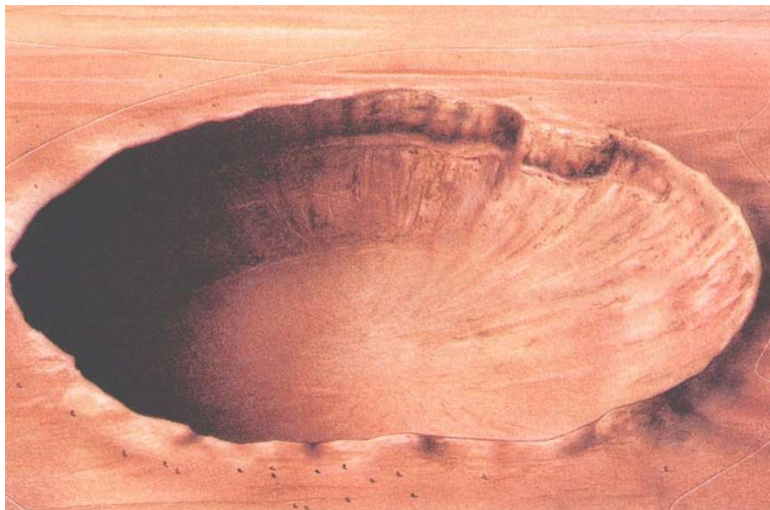


Рис. 1.12. Кратер Беррінджера (штат Арізона, США) – свідок нелінійних явищ, обумовлених падінням астероїда в доісторичні часи.



Рис. 1.13. Циклон – великомасштабний нелінійний вихор в атмосфері Землі.



Рис. 1.14. Торнадо (смерч) – приклад середньомасштабного високоенергетичного нелінійного явища в атмосфері.



Рис. 1.15. Протяжна впорядкована хмарна структура над Україною та Угорщиною (вигляд з літака) – результат складних процесів у системі суша – атмосфера.
(Фото В. Г. Галушка.)



Рис. 1.16. Яскравий приклад самоорганізації в природі: полярне сяйво, квазі-періодично розподілене в просторі, яке спостерігалося над Швецією 23 лютого 2016 р. (фото S. Skinner).



Рис. 1.17. Ядерний вибух в атмосфері (вид з літака, висота близько 10 км) – джерело цілого комплексу нелінійних явищ у всіх геоболонках.



Рис. 1.18. Атмосферний термоядерний вибух спричиняє цілий комплекс нелінійних процесів у всіх земних оболонках.

Термін солітон походить від латинського слова “солус”, тобто один, а закінчення -тон підкреслює, що об’єкт за своїми властивостями схожий на частинку (протон, нейтрон і т. п.).

Вперше солітони на воді описав у 1834 р. шотландський інженер і кораблебудівник Дж. С. Рассел. Ось як він виклав результати своїх спостережень [42].

“ Баржа зненацька зупинилася; але маса води, яку баржа привела в рух, не зупинилася. Натомість вона зібралася біля носа судна в стані шаленого руху, потім несподівано залишила його позаду, котячись вперед з величезною швидкістю і набираючи форми великого поодинокого піднесення, тобто округлого, гладкого та чітко вираженого водяного пагорба, який продовжував свій шлях уздовж каналу, анітрохи не змінюючи своєї форми та не знижуючи швидкості. Я поїхав за ним верхи, і коли я наздогнав його, він, як і раніше, котився вперед зі швидкістю приблизно вісім чи дев’ять миль на годину, зберігши свій початковий профіль піднесення довжиною близько тридцяти футів і висотою від фута до фута з половиною. Його висота поступово зменшувалась ”.

Зменшення висоти пагорба обумовлено тим, що солітон не підживлювався енергією. Солітон на воді використовує лише свою енергію. Проте він дуже стійкий. Чому? Справа в тому, що в цьому випадку конкурують два процеси. З одного боку, явище дисперсії прагне “розмазати” одногорбу хвилю вздовж напрямку її поширення. З іншого боку, нелінійні явища “утримують” її від цього, і хвиля, рухаючись, зберігає свою форму. Такий об’єкт називається класичним солітоном. Він – одновимірний.

Найчастіше, як зазначалося, солітони існують завдяки припливу енергії, і тому їх називають дисипативними.

Солітони бувають двовимірними. До них належить, наприклад, циклон.

Виявилося, що солітон – всюдисутній. Він має місце в мікросвіті, макросвіті та мегасвіті.

За сучасними уявленнями елементарні частинки – це солітоноподібні об’єкти, або солітони квантових полів. До них належить монополь Дірака – гіпотетичний елементарний магніт з одним полюсом.

Приклади солітонів в галузі макросвіту вже наводилися. Слід додати, що солітони виникають при значних енерговиділеннях в літосфері, атмосфері, іоносфері і магнітосфері, тобто при землетрусах, виверженнях вулканів, потужних вибухах, стартах і польотах ракет і т. і. «Родичем» солітона є кульова блискавка.

Іншим прикладом «родича» є знаменитий «дев’ятий вал» під час шторму на морі. Вал, як відомо, зазвичай утворений сімнадцятьма поодинокими хвилями. Найсильніша з них – дев’ята, вона ж – центральна. Власне солітоном є об’єкт цього сімейства із сімнадцяти хвиль.

Солітоноподібні об’єкти існують у мегасвіті. До них належать Велика Червона пляма в атмосфері Юпітера, чорні дірки, спіральні галактичні структури та ін. (див. рис. 1.4).

«Родичі» солітонів виявляються і в світі живої природи. Їхнім прикладом є нервові імпульси.

Процеси з властивостями солітонів характерні для економіки та суспільства.

Отже, солітон – не екзотичне утворення, як вважалося раніше. Він є проявом універсальних фундаментальних властивостей природи. Поняття солітону значно розширилося. Тепер до них відносять багато локалізованих нелінійних структур.

1.1.7. Порядок і хаос

Настав час відповісти на запитання: “Чи можуть існувати детермінований хаос, хаотичний порядок?” Виявляється, можуть. Перший також називається динамічним хаосом, а другий називається самоорганізацією.

Загальні відомості. Порядок і хаос еквівалентні стійкості та нестійкості динамічної (тобто такої, що змінюється в часі) системи. Природа влаштована так, що не буває ні абсолютного хаосу, ні абсолютного порядку. Реальна система, зазвичай, перебуває у деякому проміжному стані.

Категорія «хаос» відбиває факт непередбачуваності поведінки системи, а категорія «порядок», навпаки – її передбачуваність.

Слід наголосити, що детермінований хаос – результат нелінійності та відкритості системи – відрізняється від просто випадкового процесу. У динамічному хаосі є гармонія, він значно «красивіше» звичайного випадкового процесу. Грубо кажучи, детермінований хаос – лише частково хаотичний, а частково – детермінований, він ніби перебуває посередині між порядком та хаосом.

Як же зароджувалися такі незвичні та суперечливі уявлення про динамічний хаос?

Еволюція уявлень про детермінований хаос. Математичні основи опису детермінованого хаосу (нестійкості розв’язків диференціальних рівнянь) беруть свій початок у роботах професора Харківського університету А. М. Ляпунова та французького математика А. Пуанкаре, виконаних на рубежі XIX – XX століть. Перша математична модель, що описує такий хаос, була побудована і чисельно досліджена американським метеорологом Е. Лоренцом у 1963 р. Він уперше виявив нестійкий характер поведінки системи. За відсутності випадкових сил у детермінованій системі чомусь виникали хаотичні процеси. Чим вони викликаються? Виявилося, що головною причиною появи хаосу є нелінійність системи. Ще одна причина полягає в тому, що система – відкрита, тобто з припливом зовні енергії (речовини, інформації). Нелінійність призводить до біфуркації, тобто до вибору шляху еволюції, який є випадковим. Це означає, що дві однакові системи через деякий час виявляються в різних умовах. Інакше висловлюючись, трохи змінивши початкову умову, вдається перевести систему до зовсім іншого стану. Наприклад, легкий помах крил метелика в Європі теоретично зможе викликати рясний снігопад улітку на території США. Така сильна залеж-

ність від вихідних або початкових умов отримала назву «ефекту метелика» (або батерфляй-ефекту).

Динаміку нелінійних систем зручно описувати за допомогою траєкторій у так званому фазовому просторі (у найпростішому випадку осями на фазовій площині є координата та швидкість об'єкта дослідження). У випадку детермінованого хаосу набір траєкторій утворюють густу множину кривих, іменованих дивним атрактором (рис. 1.19).

У математичному плані подібними ефектами займається вже згадувана теорія катастроф.

Справжній сплеск інтересу до детермінованого хаосу спостерігається з 70-х рр. XX століття, коли було виявлено, що у найпростіших радіотехнічних генераторах за відсутності випадкових зовнішніх сил можуть виникати хаотичні коливання.

З того часу прояви динамічного хаосу виявили у всіх розділах сучасного природознавства. Наприклад, поява хаосу не дозволяє надійно прогнозувати погоду, клімат, моменти настання землетрусу чи виверження вулкана та багато іншого.



Рис. 1.19. Приклад дивного атрактора – неодмінного "супутника" еволюційної нелінійної системи, детермінованого хаосу.

Таким чином, виникнення хаосу в простих детермінованих, але обов'язково нелінійних і відкритих системах - універсальна фундаментальна властивість природи, світу.

Хаотизація, деградація та самоорганізація. Чи може з безладу виникнути порядок? Класична фізика це питання дає негативну відповідь. Таку ж відповідь підказує нам повсякденне життя: залишений сам по собі город швидко заростає бур'янами, будинок без ремонту та догляду старіє та розвалюється, розбита чарка втрачена безповоротно, спалене вугілля перетворилося на тепло та дим. Приклади можна продовжувати нескінченно. Але подивимося на природу з іншого боку. Чому ж у Всесвіті панує досить добре виражений порядок, чому він спостерігається в Сонячній системі? Чому відносно впорядковано межі океанів та континентів? Чому існують циклони та антициклони в атмосфері, ринги (вихори) в океанах? Адже вони – прояви порядку! Чому, нарешті, на Землі зародилося життя, і з'явилася мисляча істота – людина? Ці та інші питання,

пов'язані з виникненням порядку з безладу, здавна хвилювали дослідників природи. Але відповідь була отримана лише у другій половині XX століття. І не одразу, а поступово.

Формування ідеї самоорганізації. Під самоорганізацією розуміється виникнення порядку з безладу.

Давно був помічений порядок у Всесвіті, у Сонячній системі, виявлено 11-річний цикл активності Сонця, відкриті кільця Сатурна. У 1900 р. Г. Бенар описав виникнення упорядкованих структур на сковороді при нагріванні олії у ній (рис. 1.20). Тепер їх називають комірками Бенара. Вони являють собою тісно прилеглі один до одного шестикутні утворення (структури). «Родичами» комірок є хмари майже правильної форми, які розташовуються на небі в шаховому порядку (див. рис. 1.15). І ті, й інші виникають за рахунок припливу тепла та подальшої конвекції рідини або газу. На рис. 1.16 показано ще один приклад упорядкованості.

Добре відомі явища виникнення хвильового рельєфу піску або снігу під дією вітру, явище утворення періодичних сходів у гірських річках або у водозливах гребель (рис. 1.21).

Ще в середині XIX ст. Г. Мендель відкрив свої знамениті закони. З незапам'ятних часів відомо, що серцебиття – упорядкований процес, що шкіра у ягуара – плямиста, а хвіст – смугастий.

Приклади таких дивовижних "подарунків" природи можна продовжити. Але що в них спільного? Спільне залишалось непоміченим до класичних робіт хіміка Б. П. Білоусова. У 1951 р. він виявив, що у процесі хімічної реакції колір розчину періодично змінювався (червоний – синій – червоний). Це було відкриття. Адже до дослідів Б. П. Білоусова вважали, що хімічні реакції необернені. І це правильно, але тільки для закритих систем і лише поблизу стану рівноваги. Вдалині від нього процеси можуть стати не тільки оберненими, а й періодичними. Ця ідея, як і всяка нетривіальна ідея, утвердилася не одразу. Досліди Б. П. Білоусова були продовжені А. М. Жаботинським, а також повторені за кордоном. З того часу реакція набула статусу класичної і отримала назву реакції Білоусова – Жаботинського. Подібні періодичні процеси стали називатися автохвилями. Вони поширюються в активних середовищах, тобто в середовищах з підживленням, або в відкритих системах. Дещо пізніше були виявлені спіральні автохвилі. Такі хвилі добре вивчені у біофізиці.

По-справжньому процеси самоорганізації були осмислені лише після створення основ нерівноважної (нелінійної) термодинаміки у 60 – 70-х рр. XX століття. Її родоначальником вважається бельгійський фізик І. Пригожин. З 70-х рр. теорія самоорганізації стає міждисциплінарною системою знань. Її стали називати синергетикою, що в перекладі з грецької означає «спільний». У синергетиці головна роль відводиться спільним чи кооперативним процесам.

Приклади самоорганізації. Вище вже наведено приклади самоорганізації. Їхнє коло безперервно розширюється. Ось деякі з них.



Рис. 1.20. Упорядковані шестикутні структури на дні сковорідки (комірки Бенара) – приклад самоорганізації в лабораторних, точніше кухонних умовах.



Рис. 1.21. Хвилясті структури на піску – прояви самоорганізації.

Цунамі – впорядкована хвиля при хаотичних процесах, що супроводжують землетрус (див. рис. 1.7). Хвилі-вбивці – гігантські хвилі, що раптово виникають в океані заввишки, імовірно, до 50 метрів (висота штормових хвиль не перевищує 14 м).

Кульова блискавка – стійке утворення, що виникає при деяких грозах.

У приземних шарах атмосфери іноді виникають хмари досить правильної форми (рис. 1.15).

Полярні саява, деякі аномальні аерокосмічні явища і навіть так звані НЛО являють собою впорядковані структури (см. рис. 1.16).

Велика Червона Пляма в атмосфері Юпітера – це гігантський упорядкований, довгоживучий вихор, що нагадує земний цикллон (см. рис. 1.4).

Іншим не менш яскравим прикладом самоорганізації може служити Гексагон (шестикутник) біля північного полюса в атмосфері Сатурна, виявлений у

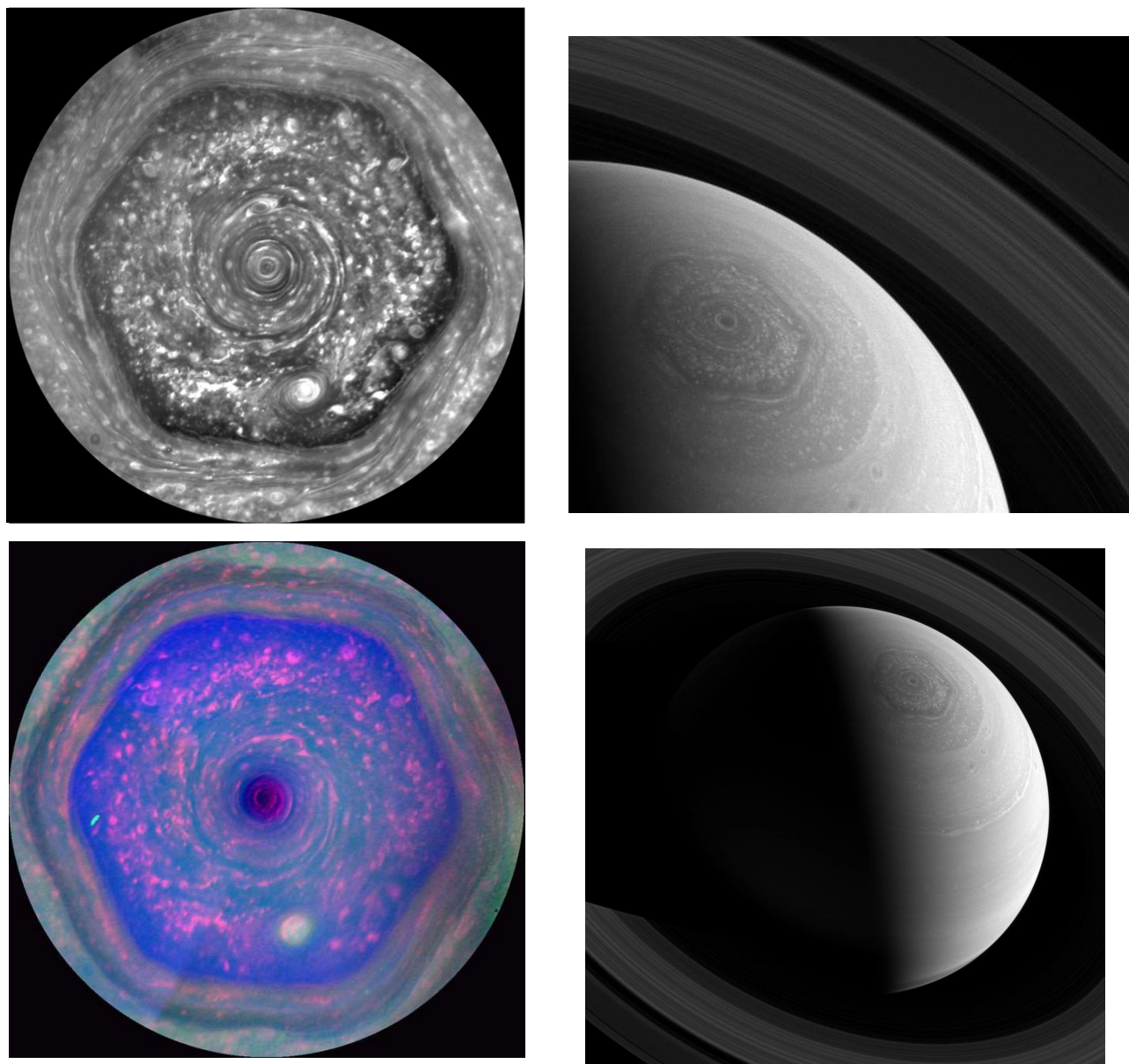


Рис. 1.22. Гексагон в атмосфері Сатурна.



Рис. 1.23. Упорядковані структури – результат дії нелінійних процесів у біосфері.

1988 р. за допомогою міжпланетної космічної станції «Вояджер» (рис. 1.22). Гексагон є гігантським атмосферним вихором дивовижної та до кінця не поясненої форми діаметром близько 32 тис. км.

Швидше за все, завдяки самоорганізації виникла Сонячна система з космічного пилу, що колись існував хаотично розкиданий.

Зауважимо, що виникнення біосфери та її еволюція – найкращі докази проявів законів синергетики. Наприклад, бджоли, "зовсім не знаючи" азів синергетики, чудово будують упорядковані структури – стільники (рис. 1.23).

С. П. Капіца показав, що населення Землі також є системою, що самоорганізується.

Прикладів, здається, достатньо. Можна зробити узагальнення: процеси самоорганізації – всюдисусці.

Умови виникнення самоорганізації. На підтримку порядку потрібно витрачати енергію. Для цього її необхідно підвести до системи, де вона має розвіятись (дисипувати). Отже, система має бути відкритою та дисипативною.

В умовах безладу параметри системи флюктуують, тобто змінюються випадковим чином. Флюктуації можна подати у вигляді великого (або нескінченного) набору простих хвиль – мод. І якщо серед цих хвиль знаходяться моди з амплітудою, що швидко збільшується, то вони і відбирають енергію у інших мод. Обмін енергією можливий за рахунок нелінійної взаємодії мод. Швидко-рослі моди зазвичай виявляються довгоживучими. Вони підкоряють собі слабкі моди. Так виникає впорядкована поведінка, так формуються утворення, які отримали назву структур. Завдяки упорядкованості ці структури – когерентні.

Цікаво, що перехід від сприйняття до думки є процесом самоорганізації. Думка – це когерентна структура, що зароджується у мозку.

Таким чином, самоорганізація можлива лише у відкритих дисипативних нелінійних системах.

Тепер можна дати чітке визначення синергетики. Синергетика – це теорія самоорганізації нелінійних відкритих дисипативних систем.

Важливо, що детермінований хаос також виникає лише нелінійних відкритих дисипативних системах. Детермінований хаос може призвести до деградації (розпаду) системи.

Отже, самоорганізація та хаотизація (деградація) – універсальні фундаментальні поняття в сучасній науці. Вони являють собою дві реалізації одного і того ж процесу, два можливі шляхи еволюції. Не буває ані абсолютного хаосу, ані абсолютного порядку. Реальна система зазвичай перебуває у певному проміжному стані.

1.1.8. Нелінійна парадигма

Парадигма – це система поглядів, вихідних положень даної науки.

Основні положення нелінійної парадигми були сформульовані одним з авторів (Л. Ф. Чорногором) більше сорока років тому і опубліковані в низці ро-

біт. Ці положення викладаються під час читання загального курсу “Нелінійна радіофізика” студентам радіофізикам Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Вони зводяться до наступного (див., наприклад, [4, 56, 57, 59]).

Навколишній світ, взагалі кажучи, – нелінійний, він описується нелінійними рівняннями. Тому нелінійні явища в сучасній науці не виняток, а закономірність.

1. Нелінійність – універсальна, фундаментальна і головна властивість світу. Вона з самого початку властива природі.
2. Матерія – надскладна нелінійна система. Її еволюція (рух) описується нелінійними співвідношеннями.
3. Нелінійність – рушійна сила спрямованої еволюції.
4. Нелінійна наука складніша та багатша явищами, ніж лінійна (чи ж лінеаризована) наука. Остання є границею (і дуже «скромною») нелінійної науки.
5. Нелінійне світобачення – більш адекватне, воно більш об’ємне і різноманітне, ніж лінійне світобачення.
6. Сьогодні ми ще дуже мало знаємо про багато дивовижних властивостей нелінійного світу, але ще менше вміємо їх використовувати.
7. Можливість переходу нелінійної системи від порядку до хаосу та від хаосу до порядку – дві найважливіші властивості нелінійного світу.

1.1.9. Роль нелінійних явищ та їх моделей

У формуванні нелінійного світобачення неоціненну роль відіграли «віхові» спостереження та експерименти, а також «віхові» моделі. Перелічимо деякі з них.

Без сумніву, до «віхових» спостережень слід віднести виявлення поодиноких хвиль, проявів ударних хвиль у газах та рідинах, комірок Бенара, періодичності в хімічних реакціях, періодичних коливань числа хижаків та їх жертв, упорядкованих процесів у лазерах, хаотичних коливань у простих детермінованих системах і багато іншого.

«Віхові» моделі слід розділити на аналітичні та комп’ютерні.

Визначальну роль зіграли еталонні нелінійні рівняння та їх точні аналітичні розв’язки. Прикладами таких рівнянь є рівняння Рімана, Бюргерса, Кортевега – де Вріза, Кадомцева – Петвіашвілі, нелінійне рівняння Шредінгера та ряд інших [1, 42]. Аналіз розв’язків еталонних рівнянь дозволив «відчути» нетривіальність нелінійних процесів, їх специфіку, підійти до вироблення нелінійної інтуїції, закласти основи нелінійного світобачення.

Виняткова роль у формуванні нелінійних уявлень зіграли розв’язання нелінійних задач на ЕОМ. «Віховими» були проблема Фермі–Пасти–Улама (вивчення коливань нелінійної струни), дослідження моделі А. Тьюринга (моделювання явища морфогенезу), задача про взаємодію поодиноких хвиль (соліто-

нів), вивчення метеорологічної моделі Е. Лоренца, дослідження процесів “загострення” при нелінійному нагріванні речовини та багато інших. Комп’ютерне розв’язання «віхових» нелінійних задач сприяло прискоренню процесу вироблення нелінійної інтуїції і, зрештою, нелінійного світобачення.

1.1.10. Основні особливості нелінійних систем і процесів

Нелінійні системи і процеси, що протікають в них, мають ряд незвичних для лінійного світобачення властивостей. Розглянемо їх докладніше (див. також [56, 57, 59]).

Властивість емержментності (з’явлення). Система не просто складається з підсистем. Ціле не дорівнює сумі частин, воно якісно інше. У системи виникають властивості, відсутні в підсистемах. Завдяки цим властивостям, наприклад, може вибухнути «правильно влаштована» атомна електростанція або початися третя світова і, звичайно ж, ракетно-ядерна війна через нелінійні процеси («збої») в системах попередження про ракетний напад, хоча «противник» і не збирався нападати. Непізнана властивість емержментності для новоствореної складної, а отже, і нелінійної системи, є небезпечною для людини, великих груп людей і навіть усього людства.

Властивість пороговості систем. За певного діапазону варіювання параметрів нелінійної системи якісна зміна її стану не відбувається. При досягненні цими параметрами критичного (порогового) значення стан системи може якісно змінитися. Це відбувається у точках біфуркацій.

Властивість поліваріантності еволюції. Ця властивість пов’язана з роздвоєнням траєкторій у точках біфуркацій. Якщо точок біфуркацій багато – виникає поліваріантність еволюції нелінійних систем. Поліваріантність не завжди прийнятна. Особливо у житті суспільства, країни та навіть людства. Ось чому вибір, наприклад, тієї чи іншої політичної сили є виключно важливим.

Творча роль флуктуацій. Малі флуктуації в околі точок біфуркацій здатні повести нелінійну систему по тій чи іншій траєкторії, тим чи іншим шляхом еволюції. Політична воля однієї людини може повести країну чи групу країн зовсім іншим шляхом розвитку. Як не згадати роль особистості історії – роль Наполеона, Гітлера, Сталіна та їм подібних.

Властивість дискретності шляхів еволюції. Ця властивість пов’язана зі скінченністю числа можливих траєкторій, якими може піти розвиток нелінійної системи. Після розпаду СРСР, наприклад, кожна, суверенна країна, що знову утворилася, могла піти по капіталістичному, некапіталістичному або якомусь ще шляху розвитку.

Властивість незворотності нелінійної відкритої системи. Ця властивість також пов’язана з ключовою роллю випадкових флуктуацій поблизу точок біфуркацій, випадковістю вибору шляху еволюції.

1.1.11. Особливості нелінійного світобачення

Перерахуємо коротко особливості нелінійного світобачення.

1. Нелінійна картина світу набагато складніша, більш об'ємна, багатогранніша, ніж лінійна картина світу.
2. Нелінійність проявляється як універсальна та фундаментальна властивість світу. Найімовірніше, ця властивість – головна.
3. Нелінійність породжує нетривіальність гіпотез, ідей, результатів і наслідків.
4. Реакція системи змінюється не пропорційно доданому впливові. Значні зусилля можуть призводити до незначного результату. Кому не знайомий вираз «Всі зусилля йдуть у пісок». В інших умовах слабкі, але узгоджені з системою впливи призводять до самоприскорення її еволюції. Виникає процес, що саморозгойдується, наприклад, «економічне диво», "гроші, помножені на гроші" і т. п. Причиною такої еволюції є нелінійність позитивного зворотного зв'язку.
5. Самоорганізованість складних нелінійних систем та процесів. У результаті спрацьовування численних прямих і зворотних, позитивних і негативних зв'язків між підсистемами розвиток системи відбувається самоорганізовано. Такій системі не можна (не має сенсу) нав'язувати свій «план розвитку». Ось чому часто всякі новації, реформи, революції бувають настільки шкідливими. З цієї причини медикаментозне «лікування» людини (живого організму) так часто виявляється марним і навіть небезпечним.
6. Якщо в лінійних системах хаос неминуче призводить до їх деградації, у нелінійних системах хаос може відігравати творчу роль.
7. Хаос може виникнути у повністю детермінованих умовах.
8. Порядок і хаос, самоорганізація і деградація – дві сторони «однієї й тієї медалі».
9. У складних системах можлива поліваріантність їхньої еволюції.
10. У консервативних нелінійних системах без флуктуацій процеси мають оборотність і періодичність. Періодичними можуть бути процеси у відкритих нелінійних системах.

1.1.12. Нелінійність у XXI ст.

Терміни «синергетика», «динамічний хаос» міцно увійшли в ужиток. За кордоном використовується більш ємний та адекватний термін “Nonlinear Science”. «Нелінійна наука» повинна охоплювати всю існуючу в природі різноманітність нелінійних процесів і нелінійних систем.

Для обміну науковими знаннями проводились і проводяться «нелінійні» конференції.

З 1991 р. видаються міждисциплінарні наукові журнали “Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science” (AIP Publishing), “Chaos, Solitons &

Fractals”(Elsevier) та “International Journal of Bifurcation and Chaos” (World Scientific). У той же час з’являються й нові журнали з цієї тематики, наприклад, “Journal of Chaos” (Hindawi, 2013) і “Chaos Theory and Applications” (DergiPark, 2019).

Отже, нам всім пощастило жити в складному і дивовижному нелінійному світі, пронизаному величезним числом негативних і позитивних зв’язків. При їх врахуванні вже не є справедливим принцип суперпозиції, що дозволяє отримувати розв’язки складних задач з розв’язків більш простих. Однією з принципових концепцій науки стає теорія самоорганізації, або синергетика.

Базові моделі нелінійної динаміки дозволяють більш точно описати явища природи, по-новому подивитися на розвиток науки, суспільства, людини.

Удосконалюється і «нелінійна» освіта. Курси з нелінійної теорії коливань і хвиль давно стали традиційними (див., наприклад, [3]). Читаються курси з нелінійної оптики [9, 12, 62, 63], нелінійної акустики, нелінійної фізичної механіки, синергетики тощо. З 80-х рр. минулого століття лише у нашому університеті читається загальний курс “Нелінійна радіофізика”, головною метою якого є формування у студентів нелінійного мислення та нелінійного світогляду. Після виходу у 2004 р. з друку другого видання навчального посібника автора “Нелінійна радіофізика” [4] подібний курс запроваджено у низці університетів України, а також за кордоном, зокрема у Грузії. З 2016 р. курс «Нелінійна фізика» читається на фізичному факультеті Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна О. В. Лазоренко.

У Сан-Дієго (США) у складі університету Каліфорнії функціонує інститут нелінійних досліджень.

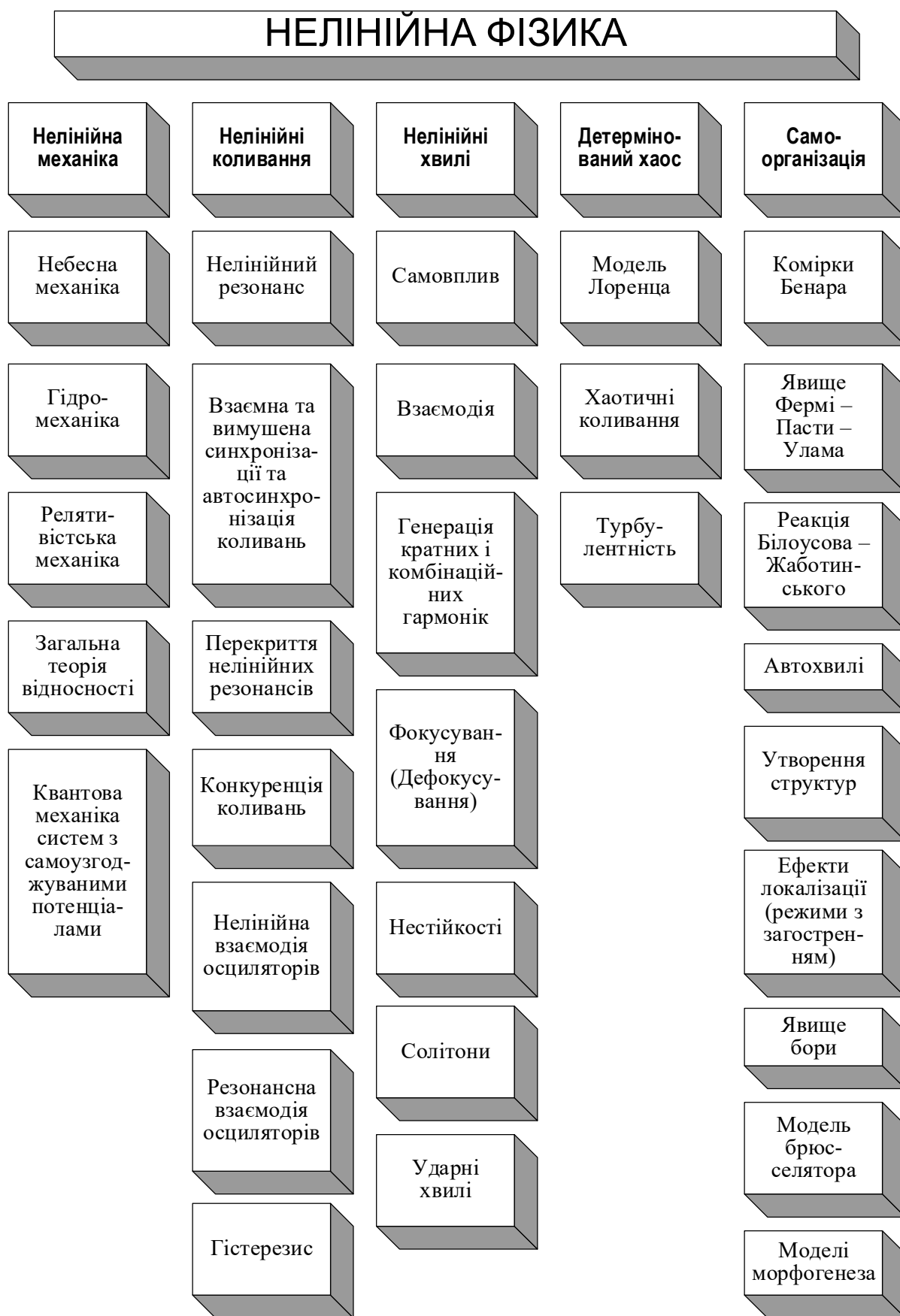
Робляться спроби ввести елементи нелінійності до середньої освіти. Цій меті служить один із розділів навчального посібника автора “Природознавство. Інтегруючий курс”, четверте видання якого вийшло 2007 р. [55].

Можна стверджувати, що у ХХІ ст. нелінійна наука перебуває на підйомі. Безперечно, їй належить майбутнє.

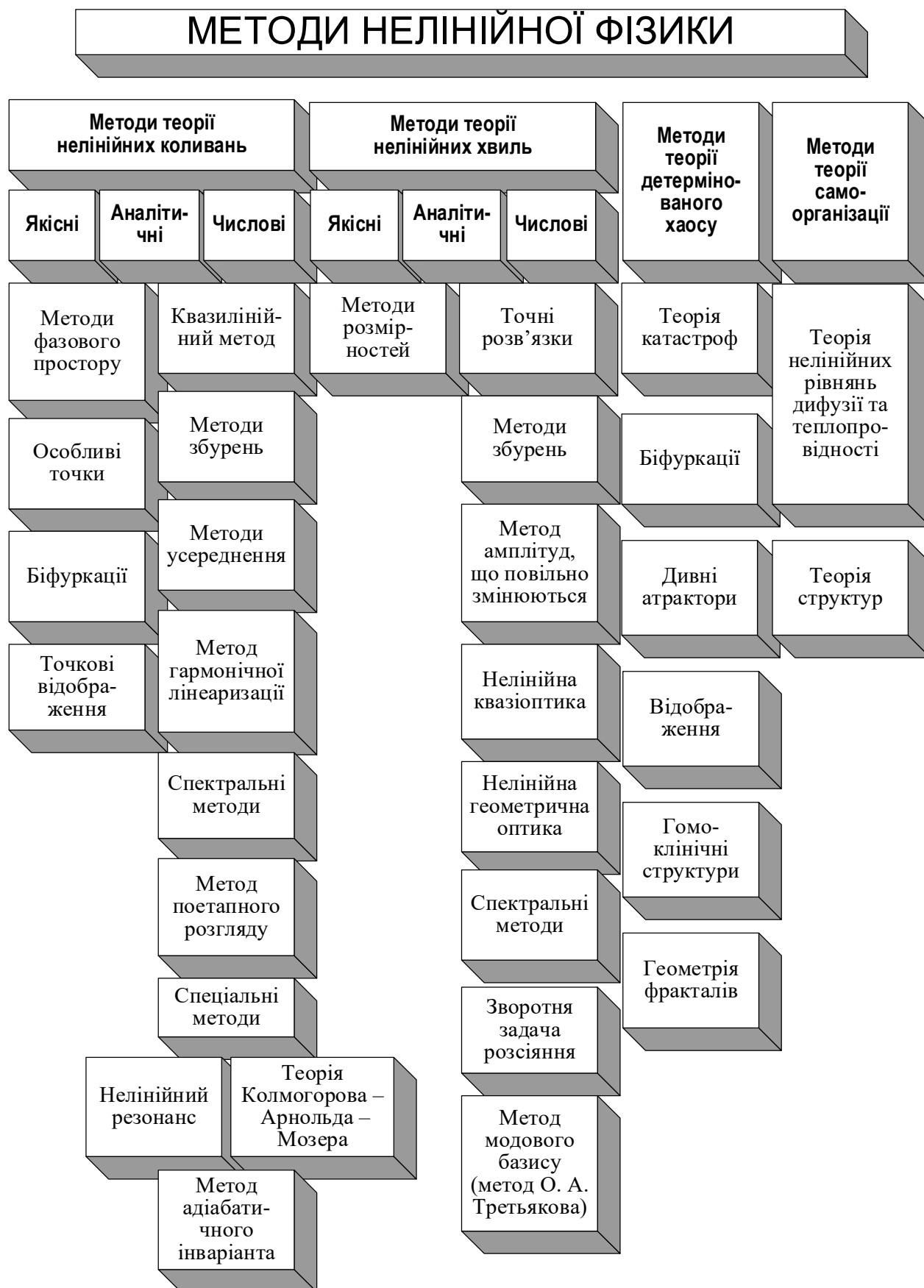
1.2. Загальні відомості про нелінійну фізику, її методи та застосування

В курсі вивчаються основні явища нелінійної фізики та радіофізики, методи їх опису, а також можливі застосування явищ (табл. 1.1, 1.2, 1.3).

Нелінійні явища у фізиці (див. табл. 1.1) не виняток, а закономірність. За найбільш загального підходу більшість фізичних процесів виявляються нелінійними. Лінійна фізика є своєрідною границею нелінійної фізики. Тому остання виявляється «багатшою» за лінійну.



Таблиця 1.1. Структура нелінійної фізики.



Таблиця 1.2. Методи нелінійної фізики.



Таблиця 1.3. Використання нелінійних явищ.

Нелінійні явища у фізиці почали вивчатися ще у XIX столітті. Такі задачі виникали в небесній механіці, в гідро- та аеромеханіці, а потім у теорії відносності (початок XX ст.). Особливо багатою на нелінійні явища є теорія коливань і хвиль.

У другій половині XX ст. нелінійні явища інтенсивно вивчаються у всіх розділах фізики та радіофізики. Значна увага приділяється вивченню локалізованих структур і нелінійних хвиль (солітонів), хаосу в простих детермінованих системах, явищ самоорганізації, тобто виникнення порядку з хаосу.

Розроблено методи нелінійної фізики (див. табл. 1.2), «нелінійну мову», які часто виявляються спільними під час розв'язання задач у різних розділах фізики. Ряд нелінійних явищ (див. табл. 1.3) вже широко використовується практично. Загалом ми поки що дуже мало знаємо про нелінійні явища, але ще менше вміємо їх використовувати.

1.3. Основні положення нелінійної парадигми

1. Процес формування уявлень про нелінійність світу та науки, що його описує, був довгий і важкий. Він завершився підготовкою передумов для формулювання основних положень нелінійної парадигми.

2. Усвідомлення ролі та місця нелінійності в сучасній науковій картині світу призвело до нової – нелінійної – парадигми, до зміни способу мислення, методології науки і світобачення в цілому.

3. Нелінійність – універсальна та фундаментальна властивість світу. Це властивість – загальна, вона більш об'ємна, більш різноманітна, ніж властивості нелінійних коливальних і хвильових процесів, ніж властивості детермінованого хаосу або самоорганізації, чим багато інших властивостей, через які нелінійність проявляється. Не слід тому ототожнювати (як це роблять багато філософів) самоорганізацію або синергетику з нелінійністю.

4. Нелінійність змусила переглянути погляди на детермінізм і випадковість, порядок і хаос, самоорганізацію та деградацію, на можливість прогнозувати поведінку складних нелінійних систем.

5. Поняття нелінійності настільки ж фундаментальне, як фундаментальне поняття матерії, поняття руху (еволюції) матерії. У загальному випадку сама матерія повинна розглядатися як надскладна нелінійна система. Взагалі, рух (еволюція) матерії також описується нелінійними законами.

6. Нелінійність співвідношень відображає факт нетривіальності процесів у матерії, що рухається.

7. Нелінійність дивує дослідника незвичайністю та глибиною гіпотез, ідей, результатів та наслідків.

8. Нелінійність – головна властивість світу, оскільки вона керує процесом еволюції світу.



Розділ 2. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОЇ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

2.1. Основні поняття та співвідношення

Нелінійні явища в радіофізиці (електродинаміці) зазвичай пов'язані зі значною амплітудою коливань або поширенням сильних електромагнітних хвиль у середовищах. Лише в дуже невеликій кількості задач нелінійної електродинаміки вдається знайти точний аналітичний розв'язок. До них належить задача про поширення сильної плоскої хвилі в ізотропному, недиспергуючому, недисипативному середовищі. Спрямовуючи вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ вздовж осей y і z відповідно, запишемо роторні рівняння Максвелла у вигляді:

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial t}, \quad (2.2)$$

де $\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{dD}{dE} \frac{\partial E}{\partial t} \equiv \epsilon_a(E) \frac{\partial E}{\partial t}$, $H = H(E)$, $\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon$, $B = \mu_0 H$, ϵ – відносна діелектрична проникність, ϵ_0 і μ_0 – електрична та магнітна сталі.

Нетривіальний розв'язок системи існує за умови, що

$$\begin{vmatrix} \frac{dH}{dE} & \epsilon_a \\ 1 & \mu_0 \frac{dH}{dE} \end{vmatrix} = 0,$$

звідки

$$H = \pm \int_0^E \sqrt{\frac{\epsilon_a(E)}{\mu_0}} dE. \quad (2.3)$$

Тоді для E маємо наступне рівняння

$$\frac{\partial E}{\partial x} \pm \frac{\sqrt{\varepsilon(E)}}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}.$$

Розв'язуючи його методом характеристик, отримаємо:

$$x = \pm \frac{ct}{\sqrt{\varepsilon}} + C(E),$$

де $C(E)$ – довільна функція. Введемо функцію f , обернену функцію C . Тоді

$$E(x, t) = f\left(x \mp \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(E)}} t\right). \quad (2.4)$$

Фазова швидкість хвилі залежить від E :

$$u(E) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(E)}}. \quad (2.5)$$

Із цим пов'язаний ефект *укручення* профілю хвилі.

Розглянемо наближені методи нелінійної електродинаміки. Вони зазвичай пов'язані із запровадженням різних *малих параметрів*.

Метод *малих збурень* припускає, що амплітуда хвилі E є набагато меншою за характерне поле E_x , тоді малим параметром є $\mu = |E| / E_x$. Розв'язок рівнянь нелінійної електродинаміки шукають у вигляді ряду за степенями μ . Прирівнюючи члени при однакових степенях μ , одержують нескінченний ланцюжок рівнянь, у якому перше рівняння розв'язується незалежно від інших, потім друге і т. д.

У методі амплітуд, що повільно змінюються (МАПЗ), вважається, що відносні зміни амплітуди хвилі на відстанях порядку довжини хвилі λ (а в нестационарних задачах і за час порядку періоду поля) є малими. Розв'язок шукається у вигляді:

$$E(x) = \tilde{A}(\mu x) e^{-ikx},$$

де

$$\mu = \lambda \left| \frac{\nabla \tilde{A}}{\tilde{A}} \right| \ll 1,$$

$\tilde{A}$ – комплексна амплітуда, точніше обвідна.

Замість хвильового рівняння одержують наближене співвідношення для амплітуди $\tilde{A}$, яке називають *укороченим рівнянням*. За наявності лише згасання укорочене рівняння для амплітуди має вигляд:

$$\frac{dA}{dx} + \alpha(A)A = 0, \quad (2.6)$$

де α – коефіцієнт загасання (поглинання).

Метод *нелінійної квазіоптики* (НК) є узагальненням МАПЗ на багатовимірний випадок і описує поширення пучків хвиль. Розв’язок шукається у вигляді:

$$E = \tilde{A}(\mu x, \sqrt{\mu}y, \sqrt{\mu}z)e^{-ikz}.$$

Для комплексної амплітуди $\tilde{A}(x, y, z)$ маємо наступне рівняння:

$$2ik \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} = \Delta_{\perp} \tilde{A} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \epsilon_{\text{нл}}(|\tilde{A}|) \tilde{A}, \quad (2.7)$$

де $\epsilon_{\text{нл}} = \epsilon - \epsilon_{\text{л}}$. Члени у правій частині описують дифракцію та нелінійну рефракцію. Якщо ввести ейконал ψ та дійсну амплітуду у вигляді:

$$\tilde{A} = A e^{-ik\psi}.$$

то з (2.7) отримаємо рівняння ейконалу та переносу:

$$2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + (\nabla_{\perp} \psi)^2 = \frac{\epsilon_{\text{нл}}(A)}{\epsilon_{\text{л}}} + \frac{\nabla_{\perp}^2 A}{k^2 A}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \nabla_{\perp} A \nabla_{\perp} \psi + \frac{1}{2} A \nabla_{\perp}^2 \psi = 0. \quad (2.9)$$

У методі *нелінійної геометричної оптики* (НГО) $\lambda \rightarrow 0$, тобто $k \rightarrow \infty$, і у правій частині рівняння (2.8) зникає останній член. В одновимірному випадку у відсутності поглинання рівняння НГО мають вигляд:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{\text{нл}}(A_0)}{\epsilon_{\text{л}}}; \quad A|_{x=0} = A_0,$$

звідки

$$A(x) = A_0,$$

$$\psi = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\varepsilon_{\text{нл}}(A)}{\varepsilon_{\text{л}}} dx.$$

У однорідному незбуреному середовищі

$$\psi = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{\text{нл}}(A_0)}{\varepsilon_{\text{л}}} x.$$

Якщо ввести показник заломлення $n = n_0 + n_{\text{нл}} = (\varepsilon_{\text{л}} + \varepsilon_{\text{нл}})^{1/2}$, то при $|\varepsilon_{\text{нл}}| \ll \varepsilon_{\text{л}}$ ейконал і нелінійний доданок до фази даються виразами:

$$\psi = \int_0^x \frac{n_{\text{нл}}}{n_{\text{л}}} dx,$$

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c} \int_0^z n_{\text{нл}} dz.$$

При поширенні сильних електромагнітних хвиль у середовищах виникає комплекс явищ, що поєднуються поняттям *самовпливу* хвиль. Амплітудний самовплив плоских хвиль описується рівнянням (2.6), розв'язок якого має вигляд:

$$\int_{A_0}^A \frac{dA}{\alpha(A)A} = -x, \quad A|_{x=0} = A_0.$$

За визначенням множник самовпливу дорівнює

$$P = \frac{A(x)}{A_0 e^{-k_0(x)}},$$

де

$$k_0(x) = \int_0^x \alpha_0 dx,$$

α_0 , k_0 – коефіцієнт поглинання та інтегральний коефіцієнт поглинання в незбуреному середовищі. У лінійній теорії $P = 1$, при $P < 1$ і $P > 1$ мають місце ефекти помутніння та просвітлення середовища.

Нелінійний доданок до фази за рахунок фазового самовпливу дається виразом:

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c} \int_0^x (n(A) - n_0) dx, \quad (2.10)$$

де n_0 – показник заломлення у лінійній теорії.

При поширенні двох хвиль принцип суперпозиції порушується і виникає *нелінійна взаємодія* хвиль. Амплітудна та фазова взаємодії описуються такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dx} + \alpha_1(A_1, A_2) A_1 &= 0; & A_1|_{x=0} &= A_{10}, \\ \frac{dA_2}{dx} + \alpha_2(A_1, A_2) A_2 &= 0; & A_2|_{x=0} &= A_{20}, \\ \Delta\varphi_1 &= \frac{\omega_1}{c} \int_0^x (n_1(A_1, A_2) - n_{10}) dx_1, \\ \Delta\varphi_2 &= \frac{\omega_2}{c} \int_0^x (n_2(A_1, A_2) - n_{20}) dx. \end{aligned}$$

Множники амплітудної взаємодії мають вигляд:

$$P_1 = \frac{A_1}{A_{10}e^{-k_{10}}}, \quad P_2 = \frac{A_2}{A_{20}e^{-k_{20}}}, \quad k_{10} = \int_0^x \alpha_{10} dx, \quad k_{20} = \int_0^x \alpha_{20} dx.$$

У лінійній теорії $P_{1,2} = 1$, якщо ж $P_{1,2} < 1$ або $P_{1,2} > 1$, то мають місце ефекти *помутніння* та *просвітлення* середовища.

У циліндричній системі координат рівняння (2.8) має вигляд:

$$2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 = \frac{\varepsilon_{\text{нл}}(A)}{\varepsilon_{\text{л}}} + \frac{1}{k^2 A} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right). \quad (2.11)$$

Якісні результати, справедливі за порядком величини, можна отримати, не розв'язуючи рівняння. Для цього можна скористатися методом *оцінки похідних*. Покажемо це на прикладі рівняння (2.11). Спочатку введемо кут

$$\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

який утворює хвильовий вектор (промінь) з віссю x , продиференціюємо (2.11) по r і отримаємо:

$$2 \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2 \theta \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\epsilon_{\text{нл}}}{\epsilon_{\text{л}}} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{k^2 A} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) \right].$$

Швидкість зміни кута нахилу променю в напрямку, перпендикулярному до напрямку поширення, описується членом $\frac{\partial \theta}{\partial r}$. Вважаючи, що товщина пучка хвиль дорівнює r_0 , максимальне значення амплітуди хвилі на осі пучка A_0 , відхилення променю за рахунок дифракції $\theta_{\text{д}}$ та *нелінійної рефракції* $\theta_{\text{нл}}$, отримаємо для цих випадків

$$\left| \frac{\partial \theta}{\partial r} \right| \sim \frac{\theta_{\text{д}}}{r_0}, \quad \left| \frac{\partial \theta}{\partial r} \right| \sim \frac{\theta_{\text{нл}}}{r_0}.$$

Аналогічно

$$\left| \frac{\partial A}{\partial r} \right| \sim \frac{A_0}{r_0}, \quad \left| \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \right| \sim \frac{A_0}{r_0^2}.$$

Тоді “дифракційна сила” описується виразом:

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{k^2 A} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) \right] \right| \sim \frac{A_0}{A_0 k^2 r_0^3} \sim \frac{1}{k^2 r_0^3}.$$

Для “рефракційної сили” маємо:

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\epsilon_{\text{нл}}}{\epsilon_{\text{л}}} \right) \right| \sim \frac{1}{r_0} \frac{|\epsilon_{\text{нл}}|}{\epsilon_{\text{л}}}.$$

Тоді викривлення променів за рахунок дифракції та рефракції по порядку величини дорівнюють:

$$\theta_d \sim \left(\frac{1}{k^2 r_0^2} \right)^{1/2}, \quad |\theta_{\text{нл}}| \sim \left(\frac{|\varepsilon_{\text{нл}}|}{\varepsilon_{\text{л}}} \right)^{1/2}.$$

Важливо, що $\theta_d > 0$, тобто за рахунок дифракції пучок хвиль завжди уширюється. В той же час $\theta_{\text{нл}}$ може бути як додатним при $\varepsilon_{\text{нл}} < 0$ (ефект дефокусування), так і від'ємним при $\varepsilon_{\text{нл}} > 0$ (ефект фокусування). При $\theta_d = |\theta_{\text{нл}}|$ настає *ефект самоканалювання*. Ширина пучка при поширенні хвилі не змінюється, оскільки дифракційне розширення в точності *скомпенсовано* самофокусуванням пучка. Цей ефект настає за умови:

$$\frac{\varepsilon_{\text{нл}}}{\varepsilon_{\text{л}}} \sim \frac{1}{k^2 r_0^2}. \quad (2.12)$$

При фокусуванні фокусна відстань становить

$$R_{\text{ф}} \approx \frac{r_0}{\theta_{\text{нл}}}.$$

2.2. Приклади

Приклад 1

Вважаючи середовище ізотропним, недиспергуючим і недисипативним, отримати точний розв'язок нелінійних рівнянь електродинаміки, обчислити фазову швидкість u , E , H для $\varepsilon(E) = \varepsilon_{\text{л}} (1 + \alpha E)^4$. Вважати, що до падіння хвилі на середовище (тобто $x < 0, t < 0$)

$$\vec{E}(0) = \vec{E}_0 \cos k_0(x - ct). \quad (2.13)$$

Розв'язання

Використовуючи співвідношення (2.3) – (2.5), отримаємо:

$$\begin{aligned}
H &= \pm \int_0^E \sqrt{\frac{\varepsilon_a(E)}{\mu_0}} dE = \pm \frac{\varepsilon_{\text{л}}^{1/2}}{\alpha \mu_0^{1/2}} \int_0^E (1 + \alpha E)^2 d(1 + \alpha E) = \\
&= \pm \frac{\varepsilon_{\text{л}}^{1/2}}{3\alpha \mu_0^{1/2}} \left[(1 + \alpha E)^3 - 1 \right], \\
u &= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(E)}} = \frac{c}{\varepsilon_{\text{л}}^{1/2}} (1 + \alpha E)^{-2}, \\
E(x, t) &= f \left(x \mp \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(E)}} t \right).
\end{aligned}$$

Вигляд функції f визначається за допомогою початкової та граничної умов. Розв'язок має бути безперервним у кожній точці середовища та поза нею, тому

$$E(x, t) = E_0 \cos k_0 \left(x - \frac{c}{\varepsilon_{\text{л}}^{1/2} (1 + \alpha E)^2} t \right).$$

Видно, що розв'язок $E(x, t)$ отримано в неявній формі, фазова швидкість хвилі залежить від шуканого розв'язку. Саме в цьому і полягає принципова відмінність нелінійної хвилі від лінійної.

Приклад 2

Розв'язати задачу про амплітудний самовплив хвилі при вигляді коефіцієнта поглинання $\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + aA^2}$, де $a = \text{const}$, A – амплітуда хвилі. Дослідити поведінку розв'язку в залежності від величини та знаку a . Зробити оцінки ефекту при $|a| = A_0^{-2}$, де A_0 – амплітуда хвилі на межі середовища.

Розв'язання

Укорочене рівняння для амплітуди (2.6) у даному випадку має вигляд:

$$\frac{dA}{dx} + \frac{\alpha_0 A}{1 + aA^2} = 0, \quad A(0) = A_0.$$

Таке рівняння розв'язується методом поділу змінних:

$$\left(\frac{1 + aA^2}{A} \right) dA = -\alpha_0 dx.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \frac{dA}{A} + aA dA &= -\alpha_0 dx, \\ \ln A + \frac{a}{2} A^2 &= -k_0 + \ln C; \quad k_0 = \int_0^x \alpha_0 dx, \\ A e^{\frac{aA^2}{2}} &= C e^{-k_0}. \end{aligned}$$

З урахуванням граничної умови

$$C = A_0 e^{\frac{aA_0^2}{2}}.$$

Тоді

$$A e^{\frac{aA^2}{2}} = A_0 e^{\frac{aA_0^2}{2}} e^{-k_0}.$$

У глибині середовища $k_0 \gg 1$, $A \rightarrow 0$. Тому

$$A \approx A_0 e^{\frac{aA_0^2}{2}} e^{-k_0}.$$

Звідси множник амплітудного самовпливу

$$P = \frac{A}{A_0 e^{-k_0}} = e^{\frac{aA_0^2}{2}}.$$

При $a > 0$ маємо $P > 1$, тобто виникає ефект самопросвітлення середовища, який тим більше, чим більшим є a . При $a < 0$ множник $P < 1$ і величина ефекту помутніння зростає зі збільшенням $|a|$. При $a = 0$ множник $P = 1$, тобто поширення хвилі описується лінійною теорією.

Далі оцінимо P для заданих значень $|a|$.

Якщо $|a| = A_0^{-2}$, то $P = e^{1/2} \approx 1.65$ або $P = e^{-1/2} \approx 0.61$.

Приклад 3

Обчислити множник амплітудної взаємодії сильної (1) і слабкої (2) хвиль у глибині середовища $P_{12} = \frac{A_2}{A_{20}} e^{k_{20}x}$.

Обмежитися поширенням обох хвиль у одному напрямку. Прийняти коефіцієнти поглинання середовища

$$\alpha_{1,2} = \frac{\alpha_{10,20}}{1 + a_{1,2}A_1^2}, \quad a_{1,2} = \text{const.}$$

Розв'язання

Запишемо укорочені рівняння (2.6) для хвиль 1 та 2 у вигляді

$$\frac{dA_1}{dx} + \frac{\alpha_{10}A_1}{1 + a_1A_1^2} = 0, \quad A_1(0) = A_{10}, \quad (2.14)$$

$$\frac{dA_2}{dx} + \frac{\alpha_{20}A_2}{1 + a_2A_1^2} = 0, \quad A_2(0) = A_{20}. \quad (2.15)$$

Поділимо (2.14) на (2.15), попередньо перенісши другі доданки в праву частину рівнянь, і отримаємо

$$\frac{dA_1}{dA_2} = \frac{\alpha_{10}A_1}{\alpha_{20}A_2} \frac{1 + a_2A_1^2}{1 + a_1A_1^2}$$

або ж

$$\frac{dA_1}{A_1} \frac{1 + a_1A_1^2}{1 + a_2A_1^2} = \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{20}} \frac{dA_2}{A_2}.$$

Для інтегрування цього рівняння розкладемо дріб у лівій частині співвідношення на прості множники:

$$\frac{1 + a_1A_1^2}{A_1(1 + a_2A_1^2)} = \frac{C_1}{A_1} + \frac{C_2A_1 + C_3}{1 + a_2A_1^2},$$

де $C_1 = 1$, $C_2 = a_1 - a_2$, $C_3 = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \int \frac{dA_1}{A_1} + (a_1 - a_2) \int \frac{A_1 dA_1}{1 + a_2 A_1^2} &= \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{20}} \int \frac{dA_2}{A_2} + \ln C, \\ \ln A_1 + \frac{a_1 - a_2}{2a_2} \ln(1 + a_2 A_1^2) &= \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{20}} \ln A_2 + \ln C, \\ A_1(1 + a_2 A_1^2)^{\frac{a_1 - a_2}{2a_2}} &= C A_2^{\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{20}}}. \end{aligned}$$

З урахуванням граничних умов

$$\begin{aligned} C &= A_{10} A_{20}^{-\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{20}}} (1 + a_2 A_{10}^2)^{\frac{a_1 - a_2}{2a_2}}, \\ \left(\frac{A_1}{A_{10}} \right)^{\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}} \left(\frac{1 + a_1 A_1^2}{1 + a_2 A_{10}^2} \right)^{\frac{a_1 - a_2}{2a_2} \cdot \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}} &= \frac{A_2}{A_{20}}. \end{aligned}$$

Тоді множник взаємодії

$$P_{12} = \frac{A_2}{A_{20} e^{-k_{20}}} = \left(\frac{A_1}{A_{10}} \right)^{\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}} \left(\frac{1 + a_1 A_1^2}{1 + a_2 A_{10}^2} \right)^{\frac{a_1 - a_2}{2a_2} \cdot \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}} e^{k_{20}}.$$

У глибині середовища, де $k_{10} \gg 1$, $A_1 \rightarrow 0$, маємо: $A_1(x) \approx A_{10} e^{\frac{a_1 A_{10}^2}{2}} e^{-k_{10}}$ (див. приклад 2). Тоді

$$P_{12} = (1 + a_2 A_{10}^2)^{-\frac{a_1 - a_2}{2} \cdot \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}} e^{\frac{a_1 A_{10}^2}{2} \cdot \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}} e^{-k_{10} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}} e^{k_{20}}.$$

Оскільки $k_{10} = \alpha_{10} x$, то

$$k_{10} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} = \alpha_{20} x = k_{20}$$

$$P_{12} = (1 + a_2 A_{10})^{-\frac{a_1 - a_2}{2a_2} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}} e^{\frac{a_1 A_{10}^2}{2} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}}.$$

Дослідимо граничні випадки.

1) Перша хвиля є дуже слабкою, тобто $A_{10} \rightarrow 0$. Тоді $P_{12} \rightarrow 1$ і, отже, взаємодії немає.

2) Друга хвиля збігається з першою, тобто йдеться лише про самовплив, $a_1 = a_2, \alpha_{10} = \alpha_{20}$ і

$$P_{12} = (1 + a_2 A_{10})^0 e^{\frac{a_1 A_{10}^2}{2}} \equiv e^{\frac{a_1 A_{10}^2}{2}},$$

що повністю збігається з результатом, отриманим у попередньому прикладі.

3) $a_2 > a_1 > 0, P_{12} > 1$, тобто виникає просвітлення середовища.

4) $a_2 < a_1 < 0, P_{12} < 1$, тобто виникає помутніння середовища.

Приклад 4

Отримати формулу для нелінійного доданку до фази за рахунок фазового самовпливу. Прийняти, що

$$n(A) = 1 + a_1 A, \quad \alpha(A) = \alpha_0(1 + a_2 A^2).$$

Оцінити величину ефекту при $|a_1| = A_0^{-1}, |a_2| = A_0^{-2}$, де A_0 – амплітуда хвилі на межі, $a_2 > 0$.

Розв'язання

Нелінійний доданок до фази за рахунок фазового самовпливу (2.10) має вигляд:

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c} \int_0^x (n(A) - n_0) dx. \quad (2.16)$$

Укорочене рівняння для амплітуд (2.6) виглядає так:

$$\frac{dA}{dx} + \alpha(A)A = 0. \quad (2.17)$$

Вважаємо, що n_0 – показник заломлення в лінійній теорії – дорівнює 1. Тоді, підставивши (2.17) до (2.16), маємо:

$$\Delta\varphi = -\frac{\omega}{c} \int_{A_0}^A \frac{n(A) - 1}{\alpha(A)A} dA,$$

де $n(A) = 1 + a_1 A$; $\alpha(A) = \alpha_0(1 + a_2 A^2)$. Обчислимо інтеграл

$$\Delta\varphi = -\frac{\omega}{c} \int_{A_0}^A \frac{a_1 dA}{\alpha_0(1 + a_2 A^2)} = \frac{a_1 \omega}{\sqrt{a_2} \alpha_0 c} \left(\operatorname{arctg} A_0 \sqrt{a_2} - \operatorname{arctg} A \sqrt{a_2} \right).$$

Фазовий ефект є максимальним у глибині середовища, де $A \rightarrow 0$, тут $\Delta\varphi$ дорівнює

$$\Delta\varphi_\infty \approx \frac{a_1 \omega}{\sqrt{a_2} \alpha_0 c} \operatorname{arctg} A_0 \sqrt{a_2}.$$

Додамо, що $\alpha_0^{-1} \equiv L_{\text{заг}}$ – глибина згасання. При $|a_1| = A_0^{-1}$, $|a_2| = A_0^{-2}$ маємо

$$\Delta\varphi_\infty \approx \pm \alpha_0^{-1} \frac{\omega}{c} \frac{\pi}{4}.$$

Тоді: при $a_1 > 0$ величина

$$\Delta\varphi_\infty \approx \alpha_0^{-1} \frac{\omega}{c} \frac{\pi}{4},$$

при $a_1 < 0$ величина

$$\Delta\varphi_\infty \approx -\alpha_0^{-1} \frac{\omega}{c} \frac{\pi}{4}.$$

В обох випадках $|\Delta\varphi_\infty| \sim \alpha_0^{-1} \frac{\omega}{c} \approx \frac{2\pi}{\alpha_0 \lambda}$, де λ – довжина хвилі. Розглянемо граничні випадки:

якщо $\alpha_0 \lambda \gg 1$, то $|\Delta\varphi_\infty| \ll 2\pi$, якщо $\alpha_0 \lambda \sim 1$, то $|\Delta\varphi_\infty| \sim 2\pi$,
якщо $\alpha_0 \lambda \ll 1$, то $|\Delta\varphi_\infty| \gg 2\pi$.

Отже, якщо $\lambda \gg L_{\text{заг}}$, то хвиля згасає вже біля межі середовища та нелінійний доданок до фази $|\Delta\varphi|$ є малою; якщо ж $\lambda \sim L_{\text{заг}}$, то $|\Delta\varphi_\infty| \sim 2\pi$. При $\lambda \gg L_{\text{заг}}$ хвиля слабо згасає і нелінійний доданок $|\Delta\varphi_\infty| \gg 2\pi$, тобто є дуже істотною.

Приклад 5

Отримати формулу для нелінійного доданку до фази слабкої хвилі (2) за рахунок взаємодії її з сильною хвилею (1) та проаналізувати результат у глибині середовища. Обидві хвилі поширюються в одному напрямку. Прийняти, що

$$n_2 = 1 + bA_1, \quad \alpha_1 = \alpha_{10}(1 + aA_1^2), \quad a > 0.$$

Для оцінок використовувати $a = A_{10}^{-2}$, $|b| = A_{10}^{-1}$.

Розв'язання

Нелінійний доданок до фази слабкої хвилі (2.10) має вигляд:

$$\Delta\varphi_2 = \frac{\omega_2}{c} \int_0^x (n_2(A_1) - 1) dx.$$

З укороченого рівняння для амплітуди сильної хвилі (2.6) випливає, що

$$dx = -\frac{dA_1}{\alpha_1(A_1)A_1}.$$

Тоді

$$\Delta\varphi_2 = -\frac{\omega_2}{C} \int_{A_{10}}^{A_1} \frac{n_2(A_1) - 1}{\alpha_1(A_1)A_1} dA_1.$$

З урахуванням заданих $n_2(A_1)$ і $\alpha_1(A_1)$ отримуємо

$$\Delta\varphi_2 = -\frac{\omega_2 b_1}{c\alpha_{10}} \int_{A_{10}}^{A_1} \frac{dA_1}{1 + aA_1^2},$$

де $\alpha_{10}^{-1} \equiv L_{\text{заг}}$ – глибина загасання сильної хвилі. Проінтегрувавши по A_1 , маємо:

$$\Delta\varphi_2 = \frac{\omega_2}{c} \frac{b}{\alpha_{10} \sqrt{a}} \left(\arctg A_{10} \sqrt{a} - \arctg A_1 \sqrt{a} \right).$$

У глибині середовища, де $A_1 \rightarrow 0$, фазовий ефект є максимальним:

$$\Delta\varphi_{2\infty} \approx \frac{\omega_2}{c} \frac{b}{\alpha_{10} \sqrt{a}} \arctg A_{10} \sqrt{a}.$$

Якщо прийняти для оцінок $a = A_{10}^{-2}$, $|b| = A_{10}^{-1}$, то

$$\Delta\varphi_{2\infty} \approx \pm \frac{\omega_2}{c} \frac{1}{\alpha_{10}} \frac{\pi}{4},$$

Тоді для $b > 0$ фазовий зсув $\Delta\varphi_{2\infty} \approx \frac{\omega_2}{c} \frac{1}{\alpha_{10}} \frac{\pi}{4}$,

для $b < 0$ величина $\Delta\varphi_{2\infty} \approx -\frac{\omega_2}{c} \frac{1}{\alpha_{10}} \frac{\pi}{4}$.

В обох випадках

$$|\Delta\varphi_{2\infty}| \sim \frac{\omega_2}{c} \frac{1}{\alpha_{10}} \approx \frac{2\pi}{\lambda \alpha_{10}}, \quad \alpha_{10}^{-1} \equiv L_{\text{заг}}.$$

Звідси можна зробити висновок, що за $\lambda \gg L_{\text{заг}}$ сильна хвиля згасає вже поблизу межі середовища та нелінійний доданок до фази за рахунок взаємодії $|\Delta\varphi_{2\infty}| \ll 2\pi$. При $\lambda \sim L_{\text{заг}}$ маємо $|\Delta\varphi_{2\infty}| \sim 2\pi$, а у випадку $\lambda \ll L_{\text{заг}}$ сильна хвиля слабо загасає і фазовий ефект виражений суттєво: $|\Delta\varphi_{2\infty}| \gg 2\pi$.

2.3. Задачі для самостійного розв'язання

2.1

Вважаючи середовище ізотропним, недиспергуючим і недисипативним, отримати точний розв'язок рівнянь електродинаміки, обчислити u , E і H для

$$\begin{aligned} \text{а) } \varepsilon(E) &= (1 + \alpha E)^2, & \text{б) } \vec{D} &= \varepsilon_0 \int_0^E (1 + \alpha \vec{E}^2)^2 d\vec{E}. \\ \text{в) } \vec{D} &= \varepsilon_0 (\vec{E} + \alpha \vec{E}^3), & \text{г) } \varepsilon(E) &= (1 + \alpha E). \end{aligned}$$

Вважати, що до падіння хвилі на середовище ($x < 0$, $t < 0$)

$$\vec{E}(0) = \vec{E}_0 \cos k_0(x - ct).$$

2.2

Розв'язати задачу про амплітудний самовплив хвилі при вигляді коефіцієнта поглинання:

$$\begin{aligned} \text{а) } \alpha &= \frac{\alpha_0}{1 + aA}, \quad a = A_0^{-1}; & \text{б) } \alpha &= \alpha_0(1 + aA), \quad a = A_0^{-1}; \\ \text{в) } \alpha &= \frac{\alpha_0}{1 + aA^3}, \quad a = A_0^{-3}; & \text{г) } \alpha &= \frac{\alpha_0}{1 + aA + bA^2}, \quad a = A_0^{-1}; \quad b = A_0^{-2}, \end{aligned}$$

де A – амплітуда хвилі. Дослідити поведінку розв'язку залежно від величин та знаків a і b . Зробити оцінки ефекту при заданих значеннях a і b , де A_0 – амплітуда хвилі на межі.

2.3

Обчислити множник амплітудної взаємодії сильної (1) та слабкої (2) хвиль у глибині середовища:

$$P_{12} = \frac{A_2}{A_{2'}} = \frac{A_2}{A_{20}} e^{k_{20}}.$$

Обмежитися поширенням обох хвиль у одному напрямку. Прийняти коефіцієнти поглинання середовища:

$$\begin{aligned}
a) \alpha_{1,2} &= \frac{\alpha_{10,20}}{1 + aA_1}, & б) \alpha_{1,2} &= \alpha_{10,20}(1 + aA_1), \\
в) \alpha_{1,2} &= \frac{\alpha_{10,20}}{1 + aA_1^3}, & г) \alpha_{1,2} &= \alpha_{10,20}(1 + aA_1 + bA_1^2).
\end{aligned}$$

2.4

Отримати формулу для нелінійного доданку до фази з допомогою фазового самовпливу. Прийняти, що:

$$\begin{aligned}
a) n(A) &= 1 + a_1 A; & \alpha(A) &= \frac{\alpha_0}{1 + a_2 A}; \\
б) n(A) &= 1 + a_1 A; & \alpha(A) &= \alpha_0(1 + a_2 A); \\
в) n(A) &= 1 + a_1 A^2; & \alpha(A) &= \frac{\alpha_0}{1 + a_2 A}; \\
г) n(A) &= 1 + a_1 A^2; & \alpha(A) &= \frac{\alpha_0}{1 + a_2 A^2}.
\end{aligned}$$

Оцінити величину ефекту при $|a_1| = A_0^{-1}$ (варіанти а, б), $|a_1| = A_0^{-2}$ (варіанти в, г), $|a_2| = A_0^{-1}$ (варіанти а, б, в), $|a_2| = A_0^{-2}$ (варіант г), де A_0 – амплітуда хвилі на межі.

2.5

Отримати формулу для нелінійного доданку до фази слабкої хвилі (2) за рахунок взаємодії її з сильною хвилею (1) та проаналізувати результат. Обидві хвилі поширюються в одному напрямку. Прийняти наступні вирази для α_1 і n_2

$$\begin{aligned}
a) \alpha_1 &= \alpha_{10}(1 + aA_1), & n_2 &= 1 + bA_1, \\
б) \alpha_1 &= \alpha_{10}(1 + aA_1)^{-1}, & n_2 &= 1 + bA_1, \\
в) \alpha_1 &= \alpha_{10}(1 + aA_1), & n_2 &= 1 + bA_1^2, \\
г) \alpha_1 &= \alpha_{10}(1 + aA_1)^{-1}, & n_2 &= 1 + bA_1^2.
\end{aligned}$$

Для оцінок використовувати:

для варіантів а) і б) $|a| = |b| = A_{10}^{-1}$;

для варіантів в) і г) $|a| = A_{10}^{-1}$; $|b| = A_{10}^{-2}$.

Вказівка: ввести глибину загасання сильної хвилі в лінійній теорії $L_{10} = \alpha_{10}^{-1}$.

2.6

Рівняння ейконалу для осесиметричного пучка в циліндричній системі координат має вигляд

$$2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)^2 = \frac{\epsilon_{nl}}{\epsilon_l} + \frac{1}{k^2 A} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right).$$

Не розв'язуючи рівняння, оцінити кути нелінійної рефракції та дифракції, отримати умову для виникнення ефекту самоканалювання.



Розділ 3. УДАРНІ ХВИЛІ

3.1. Основні поняття та співвідношення

Ударні хвилі (УХ) – це нелінійні стаціонарні хвилі, що описують рух стрибка якого-небудь параметра хвилі або середовища (густини, тиску тощо). Стаціонарність передбачає незмінність у процесі поширення, яка виникає в результаті точної *компенсації* ефектів нелінійного укрупнення та дисипації. Профіль хвилі залежить тільки від “біжучої” координати $\xi = x - ut$, де u – швидкість хвилі. Еталонним рівнянням, що описує УХ, є *рівняння Бюргерса*:

$$v_t + vv_x = \nu v_{xx}, \quad (3.1)$$

де ν – коефіцієнт в’язкості.

Користуючись методом оцінки похідних, можна визначити швидкість u та ширину фронту УХ ξ_0 . Переходячи до ξ з (3.1), маємо:

$$-uv' + vv' = \nu v''. \quad (3.2)$$

Вважаючи, що різниця швидкостей v на $\pm\infty$ дорівнює v_0 , отримаємо, що

$$|v'| \sim \frac{v_0}{\xi_0}; \quad |v''| \sim \frac{v_0}{\xi_0^2}; \quad vv' \sim \frac{v_0^2}{\xi_0}.$$

Вимагаємо рівності по порядку величини першого та другого доданків (3.2), тобто

$$\left| -u \frac{v_0}{\xi_0} \right| \sim \left| \frac{v_0^2}{\xi_0} \right|,$$

звідки $u \sim v_0$. Аналогічно з порівняння першого та третього доданків у (3.2) отримаємо

$$\left| -u \frac{v_0}{\xi_0} \right| \sim \nu \frac{v_0}{\xi_0^2}.$$

$$\text{Звідси } \xi_0 \sim \frac{\nu}{u}.$$

3.2. Приклади

Приклад 1

Ударна хвиля описується рівнянням Бюргерса $v_t + vv_x = \nu v_{xx}$. Знайти та проаналізувати розв'язок, якщо $v(-\infty) = v_2$; $v(+\infty) = v_1$; $v'(\pm\infty) = 0$; причому $v_1 < v_2$.

Розв'язання

Введемо змінну $\xi = x - ut$. Тоді

$$v_t \equiv \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -uv', \quad v_x \equiv \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{dv}{d\xi} = v',$$

$$v_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dv}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \left(\frac{dv}{d\xi} \right) = \frac{d^2 v}{d\xi^2} = v'',$$

і нелінійне диференціальне рівняння другого порядку у часткових похідних перетворюється на диференціальне рівняння, але вже у звичайних похідних відносно функції $v(\xi)$:

$$-uv' + vv' = \nu v'',$$

$$v(-\infty) = v_2; v(+\infty) = v_1; v'(\pm\infty) = 0.$$

Виділимо повну похідну та проінтегруємо

$$-uv + \frac{1}{2}v^2 = \nu v' + C.$$

Використовуємо граничні умови для визначення невідомих констант u і C :

$$\begin{cases} -uv_2 + \frac{1}{2}v_2^2 = C \\ -uv_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = C \end{cases}.$$

Звідси $u = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$; $C = -\frac{1}{2}v_1v_2$. Тоді

$$2\nu v' = (v - v_1)(v - v_2).$$

Оскільки $v_2 \geq v \geq v_1$, то права частина завжди недодатна, тому й $v' \leq 0$. Розділивши змінні та проінтегрувавши, отримуємо:

$$\frac{1}{v_2 - v_1} \ln \left| \frac{v - v_2}{v - v_1} \right| = \frac{\xi}{2\nu} + C_1.$$

Вибираючи точку відліку ξ , покладемо $C_1 = 0$. З урахуванням цього:

$$\left| \frac{v - v_2}{v - v_1} \right| = e^{\frac{\xi}{2\nu}(v_2 - v_1)}.$$

Легко переконатися, що $\frac{v - v_2}{v - v_1} < 0$. Тому остаточний вид розв'язку такий:

$$v(\xi) = \frac{v_1 e^{\xi/\xi_0} + v_2}{1 + e^{\xi/\xi_0}}, \quad \xi_0 = \frac{2\nu}{v_2 - v_1}.$$

Видно, що чим більше ν , тим більш розмитим буде фронт ударної хвилі (рис. 3.1).

Приклад 2

Ударна хвиля описується рівнянням

$$v_t + 3\alpha v^2 v_x = \nu v_{xx}. \quad (3.3)$$

Знайти та проаналізувати розв'язок, якщо

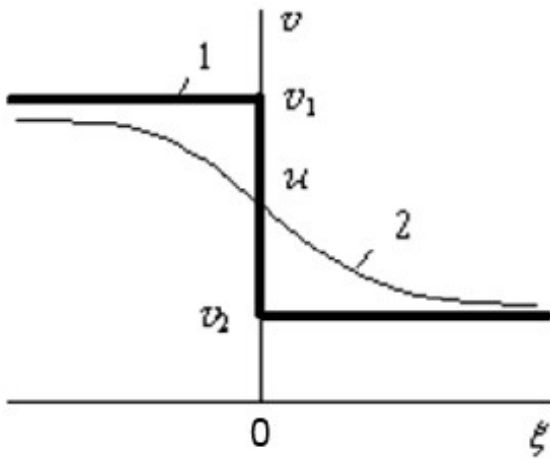


Рис. 3.1. Вигляд розв'язку $v(\xi)$. На рисунку графікові з крутішим профілем відповідає менше значення в'язкості

$$v(-\infty) = v_2; \quad v(+\infty) = v_1; \quad v'(\pm\infty) = 0.$$

Розв'язання

Введемо змінну $\xi = x - ut$. Тоді

$$\begin{aligned} v_t &\equiv \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -uv', \\ v_x &\equiv \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{dv}{d\xi} = v', \\ v_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dv}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \left(\frac{dv}{d\xi} \right) = \frac{dv^2}{d\xi^2} = v'', \end{aligned}$$

Рівняння (3.3) набуває вигляду

$$-uv' + 3\alpha v^2 v' = \nu v'', \quad v(-\infty) = v_2; \quad v(+\infty) = v_1; \quad v'(\pm\infty) = 0.$$

Виділимо повну похідну та проінтегруємо

$$\begin{aligned} \left(-uv + \alpha v^3 \right)' &= \left(\nu v' \right)', \\ -uv + \alpha v^3 &= \nu v' + C. \end{aligned}$$

Використовуємо граничні умови для визначення невідомих констант u і C :

$$\begin{cases} -uv_2 + \alpha v_2^3 = C, \\ -uv_1 + \alpha v_1^3 = C. \end{cases}$$

Звідси $u = \alpha(v_2^2 + v_1v_2 + v_1^2)$; $C = -\alpha v_1v_2(v_1 + v_2)$.

Тоді

$$\frac{\nu}{\alpha} v' = (v - v_1)(v - v_{k1})(v - v_{k2}),$$

де

$$\begin{aligned} v_{k1} &= -\frac{1}{2} \left(v_1 + \sqrt{v_1^2 + 4v_2(v_1 + v_2)} \right) < 0, \\ v_{k2} &= -\frac{1}{2} \left(v_1 - \sqrt{v_1^2 + 4v_2(v_1 + v_2)} \right) > 0. \end{aligned}$$

Можна помітити, що права частина завжди менше або дорівнює 0, отже і $v' \leq 0$, а значить $v_2 > v_1$. Розділивши змінні, проінтегрувавши і поклавши константу інтегрування рівною нулю за рахунок вибору відповідним чином точки відліку по ξ , отримуємо:

$$\frac{(v - v_{k1})^{\frac{v_1 - v_{k2}}{v_{k2} - v_{k1}}} (v_{k2} - v)}{(v - v_1)^{\frac{v_1 - v_{k1}}{v_1 - v_{k1}}}} = e^{\frac{\alpha \xi}{2\nu} (v_{k2} - v_{k1})^2}.$$

Розв'язати таке рівняння відносно $v(\xi)$ за довільного вигляду v_2 і v_1 не вдається. Нехай $v_2 \gg v_1$. Тоді розв'язок набуде вигляду:

$$\begin{aligned} v(\xi) &= \frac{v_1 + \sqrt{v_1^2 + (1 + \exp(-2\xi / \xi_0)) (v_2^2 \exp(-2\xi / \xi_0) - v_1^2)}}{1 + \exp(-2\xi / \xi_0)}, \\ \xi_0 &= \nu / 2v_2^2. \end{aligned}$$

Очевидно, що чим більшим є ν , тим паче розмитим стає фронт ударної хвилі.

3.3. Задачі для самостійного розв'язання

3.1

Ударна хвиля описується рівнянням Бюргерса:

$$v_t + vv_x = \nu v_{xx}.$$

Знайти та проаналізувати розв'язок, якщо граничні умови мають вигляд:

а) $v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut;$

б) $v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = \frac{1}{2}v_0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut;$

в) $v(+\infty) = 0, \quad v(-\infty) = v_0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut;$

г) $v(+\infty) = \frac{1}{2}v_0, \quad v(-\infty) = v_0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut.$

3.2

Ударна хвиля описується рівнянням:

$$v_t + 3\alpha v^2 v_x = \nu v_{xx}.$$

Знайти та проаналізувати розв'язок, якщо граничні умови мають вигляд:

а) $v(-\infty) = 2v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut;$

б) $v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut;$

в) $v(-\infty) = 2v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut;$

г) $v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut.$

3.3

Не розв'язуючи рівняння Бюргерса

$$v_t + vv_x = \nu v_{xx},$$

оцінити швидкість та ширину фронту ударної хвилі, використовуючи метод оцінки похідних. Граничні умови мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\text{а)} \quad & v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut; \\
\text{б)} \quad & v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = \frac{1}{2}v_0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut; \\
\text{в)} \quad & v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut; \\
\text{г)} \quad & v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = \frac{1}{2}v_0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut.
\end{aligned}$$

3.4

Не розв'язуючи рівняння для ударної хвилі із загасанням, оцінити швидкість, ширину фронту хвилі та глибину загасання, використовуючи метод оцінки похідних:

$$v_t + vv_x = \nu v_{xx} + \alpha v, \quad \alpha > 0.$$

Граничні умови мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\text{а)} \quad & v(0) = v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut; \\
\text{б)} \quad & v(0) = v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut; \\
\text{в)} \quad & v(0) = v_0, \quad v(+\infty) = \frac{v_0}{2}, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut; \\
\text{г)} \quad & v(0) = v_0, \quad v(+\infty) = \frac{v_0}{2}, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut.
\end{aligned}$$

3.5

Не розв'язуючи рівняння для ударних хвиль із загасанням:

$$v_t + vv_x = \nu v_{xx} + \gamma v^2, \quad \gamma > 0.$$

оцінити глибину загасання хвилі $L_{\text{заг}}$ та порівняти $L_{\text{заг}}$ з шириною фронту ξ_0 , якщо $v = v(\xi)$, $v(\xi = -\infty) = v_0$, $v(\xi = +\infty) = 0$.

3.6

Знайти та проаналізувати розв'язок рівняння Бюргерса

$$v_t + (C_0 + v)v_x = \nu v_{xx},$$

де $C_0 = \text{const}$ при

- а) $v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut;$
 б) $v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = \frac{1}{2}v_0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut;$
 в) $v(+\infty) = v_0, \quad v(-\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut;$
 г) $v(+\infty) = v_0, \quad v(-\infty) = \frac{1}{2}v_0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut.$

3.7

Не розв'язуючи рівняння

$$v_t + 3\alpha v^2 v_x = \nu v_{xx},$$

оцінити швидкість і ширину фронту ударної хвилі. Граничні умови мають вигляд

- а) $v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut;$
 б) $v(-\infty) = 2v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut;$
 в) $v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut;$
 г) $v(-\infty) = 2v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut.$



Розділ 4. СОЛІТОНИ

4.1. Основні поняття та співвідношення

Під *класичним солітоном* розуміється поодинокі стаціонарна хвиля, що описується розв'язком рівняння *Кортевега – де Вріза* (КдВ) виду:

$$v_t + vv_x + \beta v_{xxx} = 0, \quad \beta = \text{const} > 0. \quad (4.1)$$

Солітон виникає внаслідок *компенсації* нелінійного укрупнення профілю хвилі дисперсійним розпливанням хвильового пакета. Для $\xi = x - ut$ при $v|_{\xi=\pm\infty} = v'|_{\xi=\pm\infty} = v''|_{\xi=\pm\infty} = 0$ розв'язок (4.1) має вигляд:

$$v(\xi) = \frac{v(0)}{\text{ch}^2\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)}, \quad (4.2)$$

де

$$v(0) = 3u, \quad \xi_0 = 2\sqrt{\frac{\beta}{u}}. \quad (4.3)$$

Амплітуду $v(0)$ та ширину ξ_0 солітону можна оцінити, використовуючи метод оцінки похідних. Для цього за допомогою підстановки $\xi = x - ut$ перейдемо від рівняння (4.1) до наступного співвідношення:

$$-uv' + vv' + \beta v''' = 0.$$

Враховуючи що $|v'| \sim \frac{v(0)}{\xi_0}$, $|v'''| \sim \frac{v(0)}{\xi_0^3}$, з умов рівності першого та другого, а також першого та третього доданків відповідно отримаємо

$$u \frac{v(0)}{\xi_0} \sim \frac{v^2(0)}{\xi_0}, v(0) \sim u; \quad (4.4)$$

$$u \frac{v(0)}{\xi_0} \sim \frac{\beta v(0)}{\xi_0^3}, \xi_0 \sim \sqrt{\frac{\beta}{u}}. \quad (4.5)$$

Порівняння (4.4) і (4.5) з точними значеннями (4.3) підтверджує реальність оцінок.

Нині під солітонами розуміються *локалізовані* розв'язки нелінійних рівнянь, які відповідають певним законам збереження.

Солітоноподібні розв'язки має *рівняння Гордона* виду:

$$v_{xx} + v_{tt} = f(v),$$

де $f(v)$ – нелінійна функція.

Солітон обвідної описується нелінійним *рівнянням Шредінгера* (НрШ):

$$\begin{aligned} i v_t + v_{xx} + \beta v |v|^2 &= 0, \\ \beta > 0, \quad v|_{\xi=\pm\infty} &= v'|_{\xi=\pm\infty} = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Його розв'язок шукається у вигляді

$$v(x, t) = w(x - u_1 t) e^{i\varphi(x - u_2 t)}.$$

З (4.6) для w і φ постають рівняння

$$u_2 w \varphi' + w'' - w \varphi'^2 + \beta w^3 = 0, \quad (4.7)$$

$$-u_1 w' + 2w' \varphi' + w \varphi'' = 0. \quad (4.8)$$

Домноженням на $2w \neq 0$ з (4.8) отримуємо рівняння:

$$\left[w^2 (2\varphi' - u_1) \right]' = 0,$$

звідки

$$w^2(2\varphi' - u_1) = C_1.$$

Через довільність у виборі w і φ можна покласти $C_1 = 0$. Тоді

$$\varphi = \frac{1}{2}u_1\xi + C_2.$$

З тієї ж причини можна вважати $C_2 = 0$, і рівняння (4.7) набуде вигляду:

$$\frac{1}{2}u_1u_2w + w'' - w\left(\frac{u_1}{2}\right)^2 + \beta w^3 = 0.$$

Після множення на w' воно легко інтегрується. Зрештою розв'язок (4.6) виявляється таким:

$$v(x, t) = \frac{v(0)}{\operatorname{ch} \frac{x - u_1 t}{\xi_0}} e^{i \frac{u_1}{2}(x - u_2 t)},$$

де

$$v(0) = \left(\frac{u_1(u_1 - 2u_2)}{2\beta} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad \xi_0 = [u_1(u_1 - 2u_2)]^{-\frac{1}{2}}.$$

4.2. Приклади

Приклад 1

Знайти солітоноподібний розв'язок рівняння “синус – Гордона”:

$$\begin{aligned} v_{tt} + v_{xx} &= \sin v, \\ v(\pm\infty) &= v'(\pm\infty) = 0. \end{aligned}$$

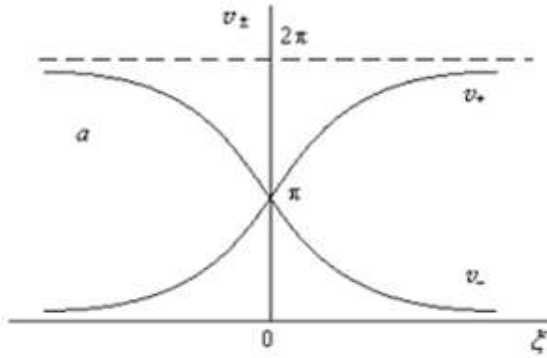


Рис. 4.1. Вигляд розв'язку $v_{\pm}(\xi)$.

Розв'язання

Введемо змінну $\xi = x - ut$. Тоді $(1 + u^2)v'' = \sin v$.

Домножимо на v' , виділимо повну похідну та проінтегруємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 + u^2)(v'^2)' &= -(\cos v)', \\ \frac{1}{2}(1 + u^2)v'^2 &= -\cos v + C. \end{aligned}$$

З граничних умов випливає, що $C = 1$. Тоді

$$v' = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} 2 \sin \frac{v}{2}.$$

Звідси після поділу змінних та подальшого інтегрування отримуємо:

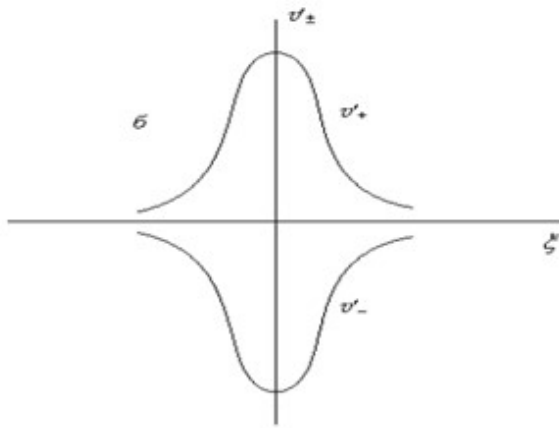
$$v_{\pm}(\xi) = 4 \operatorname{arctg} e^{\pm \frac{\xi}{\sqrt{1 + u^2}}},$$

причому стала інтегрування робиться рівною нулю в результаті вибору початку відліку за ξ .

Розв'язок $v_{\pm}(\xi)$ (рис. 4.1) – солітоноподібний, до того ж v_+ називають солітоном, а v_- – антисолітоном. Обчислимо похідну за ξ :

$$v'_{\pm}(\xi) = \pm \frac{2}{\sqrt{1 + u^2}} ch^{-1} \frac{\xi}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Видно, що $v'_{\pm}(x)$ описується солітоноподібним розв'язком (рис. 4.2).

Рис. 4.2. Вигляд $v'_\pm(\xi)$.

Приклад 2

Показати, що розв'язок у вигляді $v(\xi) = v_0 \text{ch}^{-2} \frac{\xi}{\xi_0}$ також задовольняє лінійному рівнянню гіперболічного типу

$$v_{tt} - u^2 v_{xx} = 0, \quad \xi = x - ut. \quad (4.9)$$

Розв'язання

Доведемо, що будь-яка функція $v = v(\xi)$, де $\xi = x - ut$, є розв'язком такого лінійного рівняння.

$$\begin{aligned} v_t &\equiv \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -uv', \\ v_{tt} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dv}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = -u \frac{\partial}{\partial t} \frac{dv}{d\xi} = u^2 v'', \\ v_x &\equiv \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = v', \\ v_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dv}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{dv}{d\xi} = v''. \end{aligned}$$

Підставимо обчислені похідні до (4.9). Видно, що (4.9) перетворюється на тотожність незалежно від конкретного виду функції $v(\xi)$. Отже, будь-яка $v(\xi)$, у тому числі і заданого виду, що є розв'язком рівняння (4.9).

4.3. Задачі для самостійного розв'язання

4.1

Знайти солітоноподібний розв'язок модифікованого рівняння КдВ (мКдВ)

$$v_t + 6\alpha v^2 v_x + \beta v_{xxx} = 0, \alpha > 0, \beta > 0,$$

$$v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = v''(\pm\infty) = 0.$$

Прийняти

$$a) \xi = x - ut,$$

$$б) \xi = x + ut,$$

$$u < 0.$$

4.2

Оцінити амплітуду v_0 і ширину ξ_0 солітона, не розв'язуючи рівняння мКдВ

$$v_t + 6\alpha v^2 v_x + \beta v_{xxx} = 0, \alpha > 0, \beta > 0;$$

$$v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = v''(\pm\infty) = 0.$$

Порівняти із точним розв'язком. Прийняти

$$a) \xi = x - ut,$$

$$б) \xi = x + ut.$$

4.3

Оцінити амплітуду v_0 і ширину ξ_0 солітона, не розв'язуючи рівняння КдВ

$$v_t + vv_x + \beta v_{xxx} = 0, \alpha > 0, \beta > 0;$$

$$v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = v''(\pm\infty) = 0.$$

Порівняти із точним розв'язком. Прийняти

$$a) \xi = x - ut,$$

$$б) \xi = x + ut.$$

4.4

Показати, що розв'язок у вигляді солітону обвідної $v(\xi) = v_0 \operatorname{ch}^{-1} \frac{\xi}{\xi_0}$ також задовільняє лінійному рівнянню гіперболічного типу:

$$v_{tt} - u^2 v_{xx} = 0.$$

Прийняти

$$a)\xi = x - ut,$$

$$б)\xi = x + ut.$$

4.5

Знайти солітоноподібний розв'язок рівняння Гордона типу:

$$\begin{aligned} v_{tt} + v_{xx} &= 2v^3, \\ v(\pm\infty) &= v'(\pm\infty) = 0. \end{aligned}$$

Прийняти

$$a)\xi = x - ut,$$

$$б)\xi = x + ut.$$

4.6

Знайти та проаналізувати розв'язок нелінійного рівняння Шредінгера виду:

$$\begin{aligned} i v_t + v_{xx} + \beta v |v|^2 &= 0, \\ v(\pm\infty) &= v'(\pm\infty) = 0, \beta > 0, \\ \xi_1 &= x + u_1 t, \xi_2 = x + u_2 t. \end{aligned}$$

4.7

Показати, що рівняння

$$\begin{aligned} v_t + v_0 v_x &= D v_{xx} + 2\alpha v^3 - \beta v, \\ v_0, \alpha, \beta, D &= \text{const}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, D > 0 \end{aligned}$$

з граничними умовами $v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0$ описує дисипативний солітон.

4.8

Не розв'язуючи диференціальне рівняння, оцінити амплітуду, швидкість і ширину дисипативного солітону:

- а) $v_t + vv_x = v v_{xx} + \alpha v^3 - \beta v^2$; $\alpha, \beta > 0$; $v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0$;
- б) $v_t + v^2 v_x = v v_{xx} + \alpha v^4 - \beta v^2$; $\alpha, \beta > 0$; $v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0$;
- в) $v_t + v^2 v_x = v v_{xx} + \alpha v^4 - \beta v^3$; $\alpha, \beta > 0$; $v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0$;
- г) $v_t + \gamma v^3 v_x = v v_{xx} + \alpha v^4 - \beta v^2$; $\alpha, \beta, \gamma > 0$; $v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0$.

4.9

Показати, що рівняння мКдВ зводиться до рівняння КдВ підстановкою $w = v^2$.

4.10

Знайти солітоноподібний розв'язок рівняння з нульовими умовами на функцію $v(\xi)$ та її перші дві похідні при $\xi = \pm\infty$:

- а) $v_t + vv_x + \beta v_{xxt} = 0$, $\beta < 0$,
- б) $v_t + vv_x + \beta v_{xtt} = 0$, $\beta > 0$,
- в) $v_t + vv_x + b v_{ttt} = 0$, $\beta < 0$,
- г) $v_x + vv_t + \beta v_{ttt} = 0$, $\beta > 0$.

4.11

Знайти солітоноподібний розв'язок рівняння з нульовими умовами на функцію $v(\xi)$ та її перші три похідні при $\xi = \pm\infty$:

- а) $-v_{tt} + \frac{\alpha}{2}(v^2)_{xx} + \beta v_{xxxx} = 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$,
- б) $v_{tt} + \frac{\alpha}{2}(v^2)_{xt} + \beta v_{xxxx} = 0$, $\alpha > 0$, $\beta < 0$,
- в) $v_{xx} + \frac{\alpha}{2}(v^2)_{tt} + \beta v_{xxxx} = 0$, $\alpha < 0$, $\beta < 0$,
- г) $v_{xt} + \frac{\alpha}{2}(v^2)_{tt} + \beta v_{xxxx} = 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

4.12

Знайти солітоноподібний розв'язок рівняння з нульовими умовами на функцію $v(\xi)$ та її перші три похідні при $\xi = \pm\infty$:

$$a) \quad v_{tt} + \frac{\alpha}{2}(v^2)_{xx} + \beta v_{xxxt} = 0, \quad \alpha < 0, \quad \beta > 0,$$

$$б) \quad v_{tt} + \frac{\alpha}{2}(v^2)_{xx} + \beta v_{xxxt} = 0, \quad \alpha < 0, \quad \beta < 0,$$

$$в) \quad v_{tt} + \frac{\alpha}{2}(v^2)_{xx} + \beta v_{xttt} = 0, \quad \alpha < 0, \quad \beta > 0,$$

$$г) \quad v_{tt} + \frac{\alpha}{2}(v^2)_{xx} + \beta v_{tttt} = 0, \quad \alpha < 0, \quad \beta < 0.$$

4.13

З'ясувати, чи має солітоноподібний розв'язок рівняння КдВ із нульовими умовами на функцію $v(\xi)$ та її перші дві похідні при $\xi = \pm\infty$, якщо $\beta < 0$:

$$a) \quad v_t + vv_x + \beta v_{xxx} = 0,$$

$$б) \quad v_t + \alpha v^2 v_x + \beta v_{xxx} = 0.$$

Порівняти отриманий розв'язок із розв'язком для $\beta > 0$.

4.14

Показати, що рівняння

$$a) \quad v_t + \alpha v_x + vv_x + \beta v_{xxx} = 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha = \text{const},$$

$$б) \quad v_t + \alpha v_t + vv_x + \beta v_{xxx} = 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha = \text{const}$$

зводяться до рівняння КдВ. Знайти їх розв'язки. Які умови накладаються на α ?



Розділ 5. КОГЕРЕНТНА ВЗАЄМОДІЯ ХВИЛЬ. НЕСТІЙКОСТІ

5.1. Основні поняття та співвідношення

Когерентна взаємодія хвиль виникає завдяки передачі енергії хвилі накачування з амплітудою A_0 іншим хвилям. Посередником у взаємодії є середовище.

Розглянемо *трихвильову взаємодію*, що описується системою рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_2 - \nu_1 A_1, \\ \frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1 - \nu_2 A_2, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA_1}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1 - \nu_2 A_2, \\ \frac{dA_2}{dt} = \gamma_1 A_0 A_2 - \nu_1 A_1. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

$$\frac{dA_0}{dt} = \gamma_0 A_1 A_2 - \nu_0 A_0. \quad (5.3)$$

Тут A_1 і A_2 – амплітуди хвиль, що збуджуються.

Порогове значення амплітуди хвилі накачування знаходиться з (5.1) та (5.2) при $\frac{d}{dt} = 0$ і дорівнює:

$$A_0^{(0)} = \sqrt{\frac{\nu_1 \nu_2}{\gamma_1 \gamma_2}}.$$

Якщо втрати у системі відсутні, тобто $\nu_1 = \nu_2 = \nu_0 = 0$, то процес взаємодії є *безпороговим* ($A_0^{(0)} = 0$).

Якщо $A_{1,2} \ll A_0$, то застосуємо несамоузгоджений підхід. При цьому достатньо розв'язання рівнянь (5.1) та (5.2). Задача зводиться до *двохвильової взаємодії*.

Когерентна взаємодія може призвести до експоненційного зростання $A_{1,2}(t)$, тобто до генерації *нестійкості*. Вона має стадії: *лінійну*, коли $A_0(t)$ зменшується незначно, а $A_{1,2}(t)$ зростають експоненційно з *інкрементом* λ ; *нелінійну*, коли експоненційне зростання $A_{1,2}(t)$ припиняється та $A_{1,2}(t) \rightarrow A_{1\infty,2\infty}$ внаслідок виснаження енергії хвилі накачування.

За відсутності втрат $\lambda = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} A_0$, а за їх наявності:

$$\lambda = -\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)^2 + A_0^2 \gamma_1 \gamma_2 - \nu_1 \nu_2}.$$

У системі без втрат справедливі *співвідношення Менлі – Роу*, які є різновидом закону збереження енергії:

$$\frac{A_1^2 - A_{10}^2}{\gamma_1} = \frac{A_2^2 - A_{20}^2}{\gamma_2} = \frac{A_0^2 - A_{00}^2}{\gamma_0} = \text{const}, \quad (5.4)$$

де $\gamma_0 < 0$, $\gamma_{1,2} > 0$.

Вибухова нестійкість виникає, коли приплив енергії зростає швидше, ніж втрати. Вона описується, наприклад, таким рівнянням:

$$\frac{dA}{dt} = \gamma A^2 - \nu A; \quad A|_{t=0} = A(0), \quad \gamma > 0, \quad \nu > 0. \quad (5.5)$$

Тоді

$$A(t) = \frac{A^{(0)} A(0)}{A(0) + (A^{(0)} - A(0))e^{\nu t}},$$

де $A^{(0)} = \nu / \gamma$ – значення порогу. При $A(0) < A^{(0)}$ і $\nu t \gg 1$ маємо $A(t) \rightarrow 0$. Якщо ж $A(0) > A^{(0)}$, то настає момент t_0 , коли $A(t_0) \rightarrow \infty$ (генерується вибухова нестійкість). Для моделі (5.5) справедливий вираз:

$$t_0 = \frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{A(0)}{A(0) - A^{(0)}} \right).$$

Реально вибухова нестійкість обмежується появою додаткового джерела втрат, яке було несуттєвим за досить малих часів. Нелінійна стадія таких нестійкостей описується, наприклад, таким рівнянням:

$$\frac{dA}{dt} = \gamma A^2 - \nu A - \beta A^3, \beta > 0. \quad (5.6)$$

З (5.6) при $\frac{d}{dt} = 0$ постають три розв'язки: $A_0 = 0$ (тривіальний, хвилі немає), $A_1 \approx \frac{\gamma}{\beta} \equiv A_\infty$ – стаціонарне (максимальне) значення амплітуди, $A_2 \approx \frac{\nu}{\gamma} \equiv A^{(0)}$ – порогове значення (вважається, що $4\beta\nu \ll \gamma^2$). Час виходу $A(t)$ на значення, близьке до A_∞ , дорівнює

$$t_\infty = \left(\beta A_\infty^2 \right)^{-1}. \quad (5.7)$$

При вивченні нестійкостей під змінною t розуміється не обов'язково час, нею може бути координата, а також час у рухомій системі координат

$$t' = t - \frac{x}{v_z},$$

де v_z – групова швидкість хвильового пакету.

5.2. Приклади

Приклад 1

Розв'язати наступну задачу про двоххвильову взаємодію:

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_2; & A_1|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\begin{cases} \frac{dA_2}{dt} = -\gamma_2 A_1 A_2; & A_2|_{t=0} = A_2(0). \end{cases} \quad (5.9)$$

Вважати, що $\gamma_{1,2} > 0$. Отримати та проаналізувати співвідношення Менлі – Роу, а також вирази для $A_1(t)$ і $A_2(t)$.

Розв'язання

Розділимо (5.8) на (5.9) та отримаємо

$$\frac{dA_1}{dA_2} = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{A_0}{A_1}.$$

Звідси

$$\frac{1}{2} \frac{A_1^2}{\gamma_1} + \frac{A_0 A_2}{\gamma_2} = C.$$

З початкових умов

$$C = \frac{A_0 A_2(0)}{\gamma_2}.$$

Тоді

$$\frac{A_1^2(t)}{2\gamma_1} = A_0 \frac{A_2(0) - A_2(t)}{\gamma_2}.$$

Це рівняння є співвідношенням Менлі – Роу. Звідси

$$A_2(t) = -\frac{\gamma_2}{2\gamma_1} \frac{A_1^2(t)}{A_0} + A_2(0). \quad (5.10)$$

Підставимо (5.10) до (5.8):

$$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_2(0) \left(1 - \frac{\gamma_2}{2\gamma_1} \frac{A_1^2}{A_0 A_2(0)} \right).$$

Нехай $\frac{d}{dt} = 0$. Тоді

$$A_{1\infty}^2 = \frac{2\gamma_1 A_2(0) A_0}{\gamma_2},$$

Рівняння для $A_1 / A_{1\infty}$ набуває вигляду:

$$\frac{d}{dt} \frac{A_1}{A_{1\infty}} = \gamma_1 \frac{A_0 A_2(0)}{A_{1\infty}} \left(1 - \frac{A_1^2}{A_{1\infty}^2} \right).$$

Поділимо змінні:

$$\frac{d\left(\frac{A_1}{A_{1\infty}}\right)}{1 - \frac{A_1^2}{A_{1\infty}^2}} = \gamma_1 \frac{A_0 A_2(0)}{A_{1\infty}} dt,$$

звідси

$$A_1(t) = A_{1\infty} \operatorname{th} \left(\gamma_1 \frac{A_0 A_2(0) t}{A_{1\infty}} + C_1 \right),$$
$$t_0 = \frac{A_{1\infty}}{\gamma_1 A_0 A_2(0)}.$$

З початкових умов: $A_1(0) = A_{1\infty} \operatorname{th}(C_1) = 0$, що дає $C_1 = 0$.

Таким чином

$$A_1(t) = A_{1\infty} \operatorname{th} \frac{t}{t_0}, \quad A_2(t) = A_2(0) \operatorname{ch}^{-2} \frac{t}{t_0}.$$

Графіки розв'язків $A_1(t)$ і $A_2(t)$ показано на рис. 5.1.

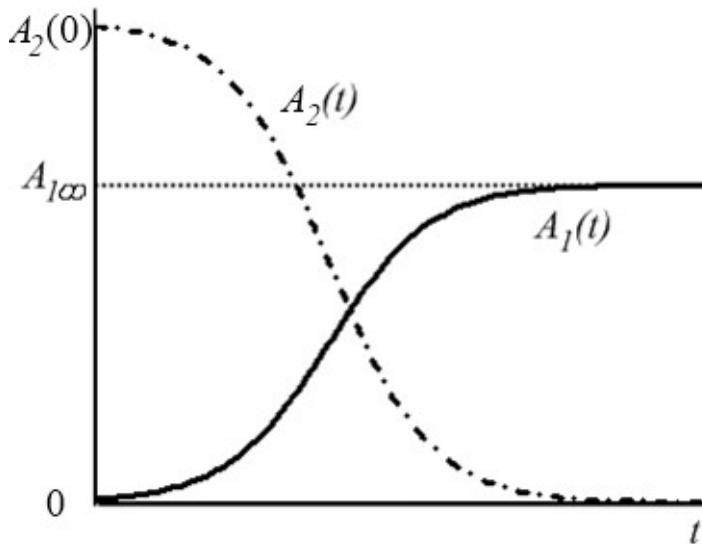


Рис. 5.1. Вигляд розв'язків $A_1(t)$ і $A_2(t)$.

Легко переконатися, що час розвитку нестійкості дорівнює t_0 .

Енергія однієї хвилі передається іншій хвилі. Таке можливе лише у випадку, якщо середовище було збурено хвилею накачування з амплітудою $A_0 \neq 0$. При $A_0 = 0$ ніякої взаємодії не буде.

Приклад 2

Дослідити генерацію другої гармоніки в нелінійному середовищі, що описується системою укорочених рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = \gamma_1 A_2^2 A_1, & A_1|_{x=0} = A_1(0), \quad \gamma_1 < 0, \\ \frac{dA_2}{dx} = \gamma_2 A_1^2 A_2, & A_2|_{x=0} = A_2(0), \quad \gamma_2 > 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Розв'язання

Співвідношення Менлі – Роу в даному випадку мають вигляд

$$\frac{A_1^2 - A_1^2(0)}{\gamma_1} = \frac{A_2^2 - A_2^2(0)}{\gamma_2}. \quad (5.12)$$

Звідси

$$A_1^2 = A_1^2(0) + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} (A_2^2 - A_2^2(0)). \quad (5.13)$$

Підставляючи (5.13) до другого рівняння (5.11), отримаємо

$$\frac{dA_2}{dx} = \gamma_2 A_2 \left(A_1^2(0) + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} (A_2^2 - A_2^2(0)) \right). \quad (5.14)$$

При $x \rightarrow \infty$ або $\frac{d}{dx} = 0$ є справедливим такий розв'язок для $A_2(\infty) \equiv A_{2\infty}$:

$$A_{2\infty}^2 = A_2^2(0) - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} A_1^2(0). \quad (5.15)$$

З урахуванням (5.15) рівняння (5.14) набуває вигляду:

$$\frac{dA_2}{dx} = \gamma_1 A_2 (A_2^2 - A_{2\infty}^2).$$

Розділяючи змінні та інтегруючи, маємо

$$A_2(x) = A_2(0) \sqrt{\frac{A_{2\infty}^2 e^{2x/x_0}}{A_{2\infty}^2 + A_2^2(0)(e^{2x/x_0} - 1)}},$$

де

$$x_0 = -(\gamma_1 A_{2\infty}^2)^{-1}, \quad A_{2\infty}^2 = A_2^2(0) - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} A_1^2(0).$$

З урахуванням $A_2(x)$ з (5.13) отримуємо

$$A_1(x) = \sqrt{A_1^2(0) + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} A_2^2(0) \frac{(A_{2\infty}^2 - A_2^2(0))(e^{2x/x_0} - 1)}{A_{2\infty}^2 + A_2^2(0)(e^{2x/x_0} - 1)}}.$$

Відповідно до отриманих розв'язків амплітуда хвилі накачування $A_1(x)$ зменшується від $A_1(0)$ до $A_{1\infty} = 0$, а амплітуда другої гармоніки зростає від $A_2(0)$ до $A_{2\infty}$.

Приклад 3

Дослідити вибухову нестійкість, що описується рівнянням

$$\frac{dA}{dt} = \gamma A^2 - \nu A; \quad \gamma, \nu = 0, \quad A(0) = A^{(0)},$$

де $A^{(0)}$ – порогове значення.

Розв'язання

Порогове значення визначається зі співвідношення $\gamma A^{(0)2} - \nu A^{(0)} = 0$ і дорівнює $A^{(0)} = \frac{\nu}{\gamma}$. Тоді вихідне співвідношення набуде вигляду

$$\frac{dA}{dt} = \gamma A \left(A - A^{(0)} \right).$$

Проінтегруємо це рівняння методом поділу змінних:

$$\frac{A}{A - A^{(0)}} = C \exp(-A^{(0)}\gamma t).$$

З початкової умови випливає, що

$$C = \frac{A(0)}{A(0) - A^{(0)}}.$$

Тоді

$$A(t) = \frac{A^{(0)}}{1 - \left(1 - \frac{A^{(0)}}{A(0)} \right) \exp(A^{(0)}\gamma t)}.$$

Видно, що при $A(0) \leq A^{(0)}$ вибухова нестійкість не виникає, вона має місце при $A(0) > A^{(0)}$.

Час розвитку вибухової нестійкості дорівнює

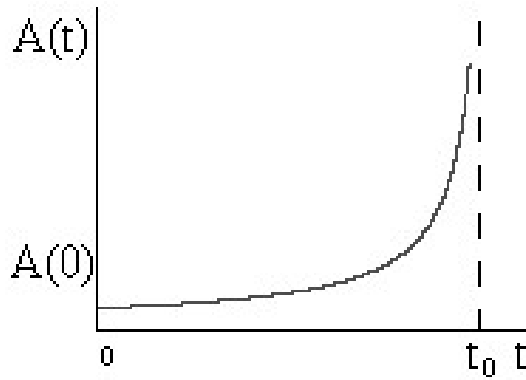


Рис. 5.2. Вигляд розв'язку $A(t)$.

$$t_0 = \frac{1}{\gamma A^{(0)}} \ln \frac{A(0)}{A(0) - A^{(0)}}.$$

Приклад 4

В результаті трихвильової взаємодії можуть виникати солітони обвідних. Вони описуються наступною моделлю:

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_2; & \gamma_1, \gamma_2 > 0; \quad \gamma_0 < 0; \end{cases} \quad (5.16)$$

$$\begin{cases} \frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1; & t = t' - \frac{x}{v_2}; \end{cases} \quad (5.17)$$

$$\begin{cases} \frac{dA_0}{dt} = \gamma_0 A_1 A_2; & A_{1,2}(\pm\infty) = 0; \quad A_0(\pm\infty) = A_\infty. \end{cases} \quad (5.18)$$

Розв'язання

Зі співвідношення Менлі – Роу маємо:

$$\frac{A_1^2 - A_1^2(\pm\infty)}{\gamma_1} = \frac{A_2^2 - A_2^2(\pm\infty)}{\gamma_2} = \frac{A_0^2 - A_0^2(\pm\infty)}{\gamma_0}$$

або

$$\frac{A_1^2}{\gamma_1} = \frac{A_2^2}{\gamma_2} = \frac{A_{00}^2 - A_0^2}{|\gamma_0|}.$$

Звідси

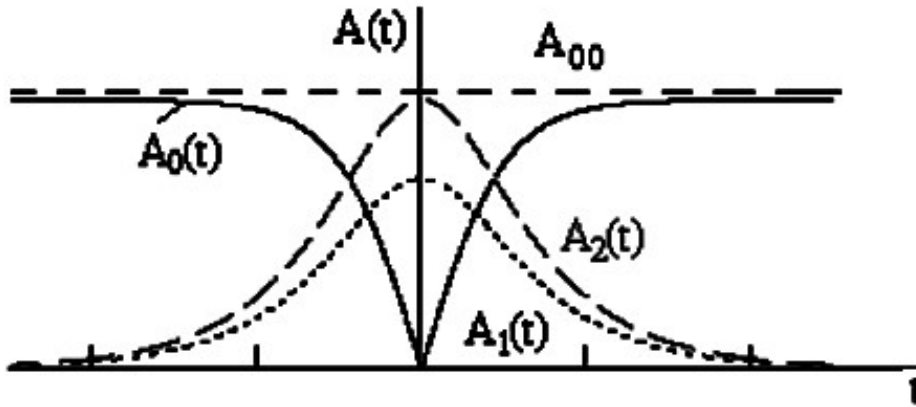


Рис. 5.3. Вигляд
розв'язків
 $A_{0,1,2}(t)$.

$$A_{1,2} = \sqrt{\frac{\gamma_{1,2}}{|\gamma_0|}} (A_{00}^2 - A_0^2). \quad (5.19)$$

Підставимо (5.19) у (5.18) і отримаємо

$$\frac{dA_0}{dt} = -\sqrt{\gamma_1 \gamma_2} (A_{00}^2 - A_0^2).$$

Для зручності інтегрування даного рівняння введемо $y = \frac{A_0}{A_{00}}$ і $\lambda = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} A_{00} > 0$. Тоді

$$\frac{dy}{1 - y^2} = -\lambda dt.$$

Звідки $y(t) = \text{th}(C - \lambda t)$. При $t = \infty$ $x(\infty) = \text{th}(-\infty) = -1$, де C – будь-яке скінченне число. Припустимо $C = 0$. Тоді:

$$y^2 = \text{th}^2 \lambda t,$$

а

$$A_0^2(t) = A_{00}^2 \text{th}^2 \lambda t.$$

В кінцевому рахунку

$$A_{1,2}^2(t) = \frac{\gamma_{1,2}}{|\gamma_0|} (A_{00}^2 - A_0^2) = A_{00}^2 \frac{\gamma_{1,2}}{|\gamma_0|} \operatorname{ch}^{-2} \lambda t - \text{“світлий” солітон},$$

$$A_0^2(t) = A_{00}^2 (1 - \operatorname{ch}^{-2} \lambda t) - \text{“темний” солітон}.$$

5.3. Задачі для самостійного розв’язання

5.1

Розв’язати задачу про двохвильову взаємодію, якщо вона описується системою виду:

$$a) \begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = -\gamma_1 A_1 A_2, & A_1|_{t=0} = A_1(0), \\ \frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1, & A_2|_{t=0} = 0, \quad A_0 = \text{const}; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_2^2, & A_1|_{t=0} = 0, \\ \frac{dA_2}{dt} = -\gamma_2 A_1 A_2, & A_2|_{t=0} = A_2(0); \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = -\gamma_1 A_1 A_2, & A_1|_{t=0} = A_1(0), \\ \frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_1^2, & A_2|_{t=0} = 0; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = -\gamma_1 A_2, & A_1|_{t=0} = A_1(0); \\ \frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_1, & A_2|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Врахувати, що $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

5.2

Обчислити порогове значення амплітуди хвилі накачування в задачі про трихвильову когерентну взаємодію ($\gamma_{1,2} > 0$; $\gamma_0 < 0$):

$$\begin{aligned}
a) \quad & \begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0^2 A_2 - \nu_1 A_1, \\ \frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0^2 A_1 - \nu_2 A_2, \\ \frac{dA_0}{dt} = \gamma_0 A_1^2 A_2 - \nu_0 A_0; \end{cases} \\
б) \quad & \begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0^2 A_2 - \nu_1 A_1 A_0, \\ \frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0^2 A_1 - \nu_2 A_2 A_0, \\ \frac{dA_0}{dt} = -\gamma_0 A_1^2 A_2 - \nu_0 A_0^2; \end{cases} \\
в) \quad & \begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_1 A_2 - \nu_1 A_1^2, \\ \frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1 A_2 - \nu_2 A_2^2, \\ \frac{dA_0}{dt} = -\gamma_0 A_0 A_1 A_2 - \nu_0 A_0^2; \end{cases} \\
г) \quad & \begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0^3 A_2 - \nu_1 A_1, \\ \frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_1 A_0^3 - \nu_2 A_2, \\ \frac{dA_0}{dt} = -\gamma_0 A_1 A_2 A_0^2 - \nu_0 A_0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Початкові умови мають вигляд:

$$A_1|_{t=0} = 0, \quad A_2|_{t=0} = 0, \quad A_0|_{t=0} = A_{00}.$$

5.3

Дослідити вибухову нестійкість, що описується рівнянням

$$a) \quad \frac{dA}{dt} = \gamma A^3 - \nu A,$$

$$б) \frac{dA}{dt} = \gamma A^3 - \nu A^2,$$

$$в) \frac{dA}{dt} = \gamma A^3 - \nu A^2 - \beta A^4,$$

$$г) \frac{dA}{dt} = \gamma A^4 - \nu A^2,$$

де $\nu, \gamma > 0$, $A(0) > A^{(0)}$, $A^{(0)}$ – порогове значення, $A|_{t=0} = A(0)$.

5.4

В результаті трихвильової взаємодії можуть виникати солітони обвідних. Вони описуються наступною моделлю:

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_2, \\ \frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1, \\ \frac{dA_0}{dt} = \gamma_0 A_1 A_2, \end{cases}$$

де $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, $\gamma_0 < 0$, $A_{1,2}(\pm\infty) = 0$, $t = t' - \frac{x}{v_2}$, $A_0(\pm\infty) = A_{00}$, v_2 –

групова швидкість. Відшукати $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_0(t)$.

Вказівка. Використовувати співвідношення Менлі – Роу.

5.5

Відомо, що дитина інтенсивно зростає до 12 – 13 років: її маса на початку життя збільшується в e разів приблизно за 2,6 роки. Вважаючи, що відносна швидкість збільшення маси дитини зменшується за експоненціальним законом з характерним часом, що дорівнює 8 рокам, скласти рівняння, що описує закон зміни маси людини протягом життя. Знайти його розв'язок і побудувати залежність $m(t)$. Чи належить така поведінка до нестійкості? Якщо так, то якого типу? Прийняти $m(0) = 3,5$ кг.

5.6

Швидкість зростання чисельності N найпростіших організмів у біосфері пропорційна їх числу. Це ж можна сказати і про швидкість їхньої загибелі. Скласти диференціальне рівняння, що описує зміну N в часі. Отримати його розв'язок. Чи описує вона нестійкість? За яких умов? Навести приклади.

5.7

Швидкість зростання чисельності N складних організмів у біосфері пропорційна квадрату їх числа, а швидкість загибелі – N . Скласти диференціальне рівняння, що описує зміну N в часі. Отримати його розв'язок. Чи описує він нестійкість? Яку? За яких умов? Навести приклади.

5.8

Чисельність N багатьох організмів у біосфері описується логістичним законом, згідно з яким відносна швидкість зміни N у часі зменшується зі зростанням N за лінійним законом. Скласти диференціальне рівняння, що описує зміну N в часі. Отримати його розв'язок. Чи описує він нестійкість? Яку? За яких умов? Навести приклади.

5.9

У деяку історичну епоху, яка включає в себе і теперішній час, зростання чисельності населення на Земній кулі задовільно описується найпростішою моделлю С. П. Капіці:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N^2}{C},$$

де $C \approx 1,62 \cdot 10^{11}$ люд·рік.

Чи є таке зростання стійким? Знайдіть та проаналізуйте залежність $N(t)$. У якому році настане “вибух” чисельності населення, якщо 1999 р. $N = 6$ млрд людей? Чи реальна модель С. П. Капіці? Чого вона не враховує? Спробуйте удосконалити цю модель.

5.10

У деяку історичну епоху, яка включає в себе і теперішній час, зростання чисельності населення на Земній кулі задовільно описується вдосконаленою моделлю С. П. Капіці:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{C}{(\tau_0 - t)^2 + \tau^2},$$

де $C \approx 1,62 \cdot 10^{11}$ люд·рік, $\tau \approx 45$ років – характерний час для людини, $\tau_0 \approx 1995$ рік.

Чи є таке зростання стійким? Знайдіть та проаналізуйте залежність $N(t)$. Чи настане стабілізація чисельності населення, якщо 1999 р. $N = 6$ млрд людей? Чи реальна ця модель С. П. Капіці? Обчисліть N у поточному році та порівняйте його з результатами перепису населення. Чи істотні відхилення від моделі?

5.11

Зростання споживаної людством потужності описується моделлю виду:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha(P)P, \quad P|_{t=0} = P_0,$$

де $P_0 = 20$ ТВт, $\alpha = \alpha_0(1 + \beta P)$, $\alpha_0 \approx 0,03$ рік⁻¹, $|\beta| \approx 10^{-14}$ Вт⁻¹. Знайдіть та проаналізуйте розв'язок модельного рівняння. Чи описує він нестійкість? Яку? За яких умов?

5.12

З метою збільшення відношення сигнал/шум прагнуть збільшення потужності свого радіопередаючого пристрою. В результаті цього зростання потужності електромагнітного випромінювання, що «забруднює» радіоефір, описується моделлю виду:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P(1 + \beta P), \quad P|_{t=0} = P_0,$$

де $P_0 = 1$ ГВт, $\alpha = 0,01$ рік⁻¹, $|\beta| \approx 10^{-12}$ Вт⁻¹. Знайдіть та проаналізуйте розв'язок модельного рівняння. Чи описує він нестійкість? Яку? За яких умов?

5.13

При зіткненнях фрагментів космічного «сміття» їх кількість прогресивно збільшується. При цьому зростання чисельності фрагментів космічного «сміття» на навколосемних орбітах описується моделлю виду:

$$\frac{dn}{dt} = \alpha(n)n - \beta n, \quad n|_{t=2000 \text{ год}} = n_0,$$

де $n_0 = 10^4$, $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 n$, $\alpha_0 \approx 0,05$ рік⁻¹, $\alpha_1 \approx 10^{-7}$ рік⁻¹, $\beta = 0,02$ рік⁻¹. Знайдіть та проаналізуйте розв'язок модельного рівняння. Чи описує він нестійкість? Яку? За яких умов? Через скільки років польоти у навколосемному космосі стануть неможливими?

5.14

За даними спостережень за середньою площею S льодовиків на Земній кулі у XXI столітті вона описується наступним законом:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha(1 + \beta S)S, \quad S(t_0) = S_0, \quad t_0 = 2000 \text{ р.}$$

Знайти закон зміни $S(t)$. Чи можна процес зменшення $S(t)$ назвати нестійким? До чого це призведе? Оцінити, за який час площа зменшиться:

- а) у два рази, $\alpha = 10^{-2}$ рік⁻¹, $\beta S_0 = 0.1$;
- б) у три рази, $\alpha = 2 \cdot 10^{-2}$ рік⁻¹, $\beta S_0 = 0.1$;
- в) у два рази, $\alpha = 10^{-3}$ рік⁻¹, $\beta S_0 = 0.2$;

г) у десять разів, $\alpha = 10^{-3} \text{ рік}^{-1}$, $\beta S_0 = 0.1$.

5.15

За даними спостережень за середньою температурою T атмосфери на Земній кулі у XXI столітті вона описується наступним законом:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha(1 + \beta T), \quad T(t_0) = T_0, \quad t_0 = 2000 \text{ р.}$$

де $\alpha = 0.02 \text{ К/рік}$, $\beta = 2/T_0 \approx 6.67 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$. Знайти закон зміни $T(t)$. Чи можна зростання $T(t)$ назвати нестійким? Оцінити значення T :

- а) $t = 2100 \text{ р.}$;
- б) $t = 2200 \text{ р.}$;
- в) $t = 2300 \text{ р.}$;
- г) $t = 2400 \text{ р.}$

5.16

Відносна кількість абонентів n мобільного зв'язку, що з'явився в $t_0 = 1994 \text{ р.}$, спочатку збільшувалося за експоненціальним законом із характерним часом τ . У момент часу t_1 настав перелом, зростання n став сповільнюватися, і n асимптотично стало наближатися до 1. Складіть рівняння, що описує закон зміни $n(t)$. Чи описує воно нестійкість? Яку? Знайдіть моменти часу t_2 , t_3 , t_4 , коли n приймає значення 0,5, 0,9, 0,99. Чому дорівнює n при $t = t_1$? Використати такі припущення:

- а) розвинена країна: $n_0 = n(t_0) = 0,05$, $\tau = 2,4 \text{ роки}$;
- б) розвинена країна: $n_0 = 0,05$, $\tau = 3 \text{ роки}$;
- в) країна, що розвивається: $n_0 = 0,01$, $\tau = 4 \text{ роки}$;
- г) країна, що розвивається: $n_0 = 0,01$, $\tau = 5 \text{ років}$.



Розділ 6. НЕЛІНІЙНА КВАНТОВА РАДІОФІЗИКА

6.1. Основні поняття та співвідношення

Нелінійні явища виникають у результаті взаємодії випромінювання потужних квантових генераторів із речовиною (твердими тілами, рідинами, газами та плазмою).

Перші нелінійні ефекти при поширенні світла в речовині виявили ще в долазерну епоху. Тому відповідний розділ фізики отримав назву *нелінійної оптики*. Оскільки оптика традиційно досліджує видиме світло (довжина хвилі $\lambda \sim 4 \cdot 10^{-7} - 8 \cdot 10^{-7}$ м), а квантові генератори випромінюють у діапазонах від субміліметрового ($\lambda \sim 10^{-4}$ м) до рентгенівського ($\lambda \sim 10^{-10}$ м), доцільно говорити про *нелінійну квантову радіофізику*.

Існує кілька механізмів, що призводять до виникнення нелінійних явищ. Величина характерного поля, при якій стає суттєвим той чи інший механізм, залежить від речовини, її агрегатного стану та параметрів, частоти хвилі тощо. Розглянемо механізми нелінійності докладніше.

6.1.1. Тепловий механізм

Тепловий механізм нелінійності пов'язаний з нагріванням речовини потужним електромагнітним випромінюванням, внаслідок чого показники поглинання та заломлення речовини стають залежними від напруженості поля хвилі. Це призводить, зокрема, до самовпливу хвилі, до ефекту самофокусування і т. і.

Величина характерного поля E_t для теплового механізму залежить від речовини. Так, помітне нагрівання кристала можливе вже при $P \sim 10^{-2}$ Вт, тобто при $E_t \sim 10^3$ В/м. Для плазми $E_t \sim 10^6$ В/м. В останньому випадку E_t зазвичай називають *плазмовим полем* E_p .

Отримаємо вираз для напруженості характерного поля при тепловому механізмі нелінійності. Як вихідне виберемо рівняння балансу внутрішньої енергії

Q при нагріванні речовини густиною ρ , питомою теплоємністю C , довжиною зразка L :

$$\frac{dQ}{dt} = \kappa P - P_1,$$

де $Q = C\rho SL\Delta T$, S – площа перерізу лазерного пучка, ΔT – зміна абсолютної температури зразка, $P = \Pi S$ – потужність лазера, Π – густина потоку енергії випромінювання, κ – коефіцієнт поглинання випромінювання, P_1 – потужність втрат (за рахунок теплового випромінювання зразка, теплопровідності, конвекції тощо). Зазвичай $\kappa P \gg P_1$ і рівняння балансу набуває вигляду:

$$C\rho SL \frac{d\Delta T}{dt} \approx \kappa P = \kappa \Pi S.$$

Звідси за тривалості впливу τ отримаємо, що

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\kappa \Pi \tau}{C\rho T_0 L}.$$

Оскільки у системі СІ

$$\Pi = \frac{P}{S} = \frac{E_0^2}{2Z_0} = \frac{E_0^2}{240\pi},$$

де $Z_0 = 120\pi$ Ом – опір вільного простору,

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{E_0^2}{E_t^2}.$$

Тут

$$E_t^2 = \frac{240\pi C\rho T_0 L}{\kappa \tau}.$$

Очевидно, що при $E_0 = E_t$ значення $\Delta T = T_0$. Виконаємо оцінки E_t .

Для слабопоглинаючого газу $\kappa = 10^{-6}$ і $\rho = 1$ кг/м³, $C = 10^3$ Дж/кг·К, $T_0 = 300$ К, $L = 0,03$ м, $\tau = 10$ с маємо $E_t \approx 2,6 \cdot 10^6$ В/м. При $S = 10^{-5}$ м², $\Pi \approx 10^{10}$ Вт/м² отримуємо $P \approx 0,1$ МВт.

Для кристалу (конденсованої речовини) з $\kappa = 10^{-6}$, $\rho = 2 \cdot 10^3$ кг/м³, $C = 5 \cdot 10^2$ Дж/кг·К, $T_0 = 300$ К, $L = 0,03$ м, $\tau = 10$ с отримуємо $E_t \approx 8,2 \cdot 10^7$ В/м. Якщо $S = 10^{-3}$ м², $\Pi \approx 10^{13}$ Вт/м², то $P \approx 100$ МВт.

6.1.2. Стрикційний механізм

Під електрострикцією розуміється виникнення пружних деформацій середовища під впливом прикладеного електромагнітного поля. В результаті електрострикції в середовищі генеруються та поширюються акустичні хвилі.

Як наслідок деформації середовища змінюється абсолютна діелектрична проникність:

$$\Delta \varepsilon_a = \left(\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \rho} \right)_0 \Delta \rho,$$

де $\Delta \rho = (\rho - \rho_0)$, ρ і ρ_0 – густина середовища в збурених полем хвилі та незбурених умовах. За рахунок зміни ε_a виникають зміни густини енергії ε_e електричного поля

$$\Delta \varepsilon_e = \frac{\Delta \varepsilon_a E_0^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \rho} \right)_0 \Delta \rho E_0^2.$$

Зміни ε_e еквівалентні дії стрикційного тиску

$$p_s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \rho} \right)_0 \Delta \rho E_0^2.$$

Відносна деформація середовища визначається безрозмірним параметром

$$\frac{p_s}{K} = \left(\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \rho} \right)_0 \frac{\Delta \rho}{2K} E_0^2 \equiv \frac{E_0^2}{E_s^2}.$$

Тут K – модуль всебічного стискання. Стрикційне поле дається наступним співвідношенням:

$$E_s^2 = \frac{2K}{\left(\frac{\partial \epsilon_a}{\partial \rho}\right)_0 \Delta \rho} = \frac{2K}{\epsilon_0 \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho}\right)_0 \Delta \rho} = \frac{2K}{\epsilon_0 \Delta \epsilon},$$

де ϵ_0 – електрична стала.

Стрикційна нелінійність стає суттєвою при збуреннях відносної діелектричної проникності $\Delta \epsilon \approx 0.1 - 1$.

Для газів при атмосферному тиску $K = 10^5 \text{ Н/м}^2$, для рідин $K = (1 - 9) \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, для твердих тіл $K \approx (1 - 3) \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$. Таким значенням K відповідають значення E_s порядку $(1 - 3) \cdot 10^8$, $10^{10} - 10^{11}$ і $10^{11} - 10^{12} \text{ В/м}$.

6.1.3. Атомний механізм

Цей механізм пов'язаний з *нелінійним відгуком* атомних або молекулярних осциляторів речовини, в якій поширюється електромагнітна хвиля.

Атомний механізм є *основним* у нелінійній квантовій радіофізиці. Він виникає тоді, коли напруженість поля хвилі стає порівнянною з внутрішньоатомною напруженістю поля

$$E_a = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r_a^2}, \quad (6.1)$$

$$r_a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}. \quad (6.2)$$

Тут r_a – радіус першої борівської орбіти, $\hbar$ – стала Планка, e і m – заряд і маса електрона. З (6.1), (6.2) отримуємо

$$E_a = \frac{m^2 e^5}{(4\pi\epsilon_0)^3 \hbar^4}. \quad (6.3)$$

Величина $E_a \sim 10^{12} \text{ В/м}$.

6.1.4. Релятивістський механізм

Даний механізм виникає у випадку, якщо *осциляторна* швидкість вільних електронів (не враховуючи релятивістську зміну маси)

$$v_e = \frac{eE_0}{m\omega}$$

стає порядку швидкості світла c , тобто при напруженості поля

$$E_r = \frac{mc\omega}{e}. \quad (6.4)$$

Наприклад, при $f \sim 10^{15}$ Гц $E_r \sim 10^{13}$ В/м.

6.1.5. Вакуумний механізм

Даний механізм може стати суттєвим, якщо робота електричного поля над електроном на комптонівській довжині хвилі цієї частинки $\lambda_k = \hbar / mc$ зрівняється з енергією спокою електрона, тобто

$$eE_v \lambda_k = mc^2$$

або

$$eE_v \frac{\hbar}{mc} = mc^2.$$

Звідси

$$E_v = \frac{m^2 c^3}{e\hbar}. \quad (6.5)$$

Величина E_v залежить тільки від фундаментальних констант і дорівнює $\sim 10^{18}$ В/м.

При $E \sim E_v$ виникають нелінійні ефекти у вакуумі. Зрозуміло, йдеться не про класичний вакуум (порожнечу), а про *фізичний вакуум*, в якому безперервно народжуються і зникають віртуальні частинки.

Таблиця 6.1. Порівняльні характеристики різних механізмів

Механізм	E , В/м	E / E_v	P , Вт	Π , Вт/м ²
Тепловий	10^3	10^{-15}	10^{-2}	10^3
Стрикційний	10^5	10^{-13}	10^2	10^7
Атомний	10^{12}	10^{-6}	10^{16}	10^{21}
Релятивістський	10^{13}	10^{-5}	10^{18}	10^{23}
Вакуумний	10^{18}	1	10^{28}	10^{33}

6.1.6. Порівняння механізмів

Зазвичай у найменших полях проявляється тепла нелінійність, у великих полях – стрикційна, тобто

$$E_t \ll E_s. \quad (6.6)$$

У ще більших полях стають суттєвими атомний, релятивістський та вакуумний механізми. Покажемо це, для чого створимо відношення, виходячи з (6.3), (6.4) та (6.5):

$$\frac{E_a}{E_v} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \right)^3 \equiv \alpha^3, \quad \frac{E_r}{E_v} = \frac{\hbar\omega}{mc^2},$$

де $\alpha \approx 1/137$ – стала тонкої структури. При цьому $E_a / E_v \sim 10^6$, а $E_r / E_v \sim 10^{-5}$ при $f \sim 10^{15}$ Гц.

Таким чином,

$$E_a \ll E_r \ll E_v,$$

а з урахуванням (6.6) маємо

$$E_t \ll E_s \ll E_a \ll E_r \ll E_v.$$

Результати оцінок цих полів, а також відповідних потужностей випромінювання P та густин потоку енергії $\Pi = P / S$ для перерізу пучка $S = 10$ мм² наведено в табл. 6.1.

Які ж поля має в своєму розпорядженні експериментатор в даний час? Наведемо приклади надсильних світлових полів. За допомогою ексимерної системи KrF ($\lambda = 0,24$ мкм, $\tau = 70$ фс) ще в 1980-х рр. отримано $\Pi \sim 10^{22}$ Вт/м²

Таблиця 6.2. Об'ємна густина енергії різних джерел

Джерело енергії	Густина енергії, Дж/м ³
Анігіляція частинок та античастинок	10^{35}
Квантовий генератор	10^{18}
Ядерна реакція	10^{17}
Хімічна реакція	$8 \cdot 10^9$
Вулканічна лава	$2 \cdot 10^9$
Блискавка	10^7
Землетрус	10^3
Потужні атмосферні процеси	$10^2 - 10^3$

($P \sim 10^{17}$ Вт), у перспективі можна отримати $\Pi \sim 10^{23}$ Вт/м² ($P \sim 10^{18}$ Вт, $\tau \sim 100$ фс). Для твердотільних систем (видимий та ближній інфрачервоний діапазони) при $\tau \sim 10$ фс отримано $\Pi \sim 10^{22}$ Вт/м², а в перспективі – $\Pi \sim 10^{27}$ Вт/м² ($P \sim 10^{22}$ Вт, $\tau \sim 10$ фс). Так звані СРА-лазери дозволили досягти $\Pi \sim 10^{24} - 10^{25}$ Вт/м². Вони мають потужність $P \sim 10^{19} - 10^{20}$ Вт при $\tau \sim 10 - 10^3$ фс [11]. Відомо, що у 2006 – 2007 рр. досягнуто значення $\Pi \sim 10^{26}$ Вт / м².

Таким чином, навіть у віддаленій перспективі навряд чи вдасться наблизитися до величини E_v . Що ж до величини E_r , можна стверджувати, що до неї підійшли впритул.

Корисно порівняти об'ємну густину енергії різних джерел (табл. 6.2).

При оцінці об'ємної густини енергії $E_e = \Pi / c$, випромінюваної квантовим генератором, вважалося, що потужність лазера близько 1 ПВт, промінь фокусується на мішені діаметром близько 3 мм.

З табл. 6.2 видно, що за об'ємною густиною енергії квантові генератори поступаються лише анігіляції частинок з античастинками.

6.2. Генерація другої гармоніки

Генерація другої гармоніки – *класичний* нелінійний ефект квантової радіофізики. Розглянемо його докладніше.

6.2.1. Вихідні рівняння

Вихідними співвідношеннями є укорочені рівняння для комплексних амплітуд:

$$\frac{d\tilde{A}_1}{dx} = -i\delta_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_1^* e^{-i\Delta kx}, \quad \delta_1 > 0, \quad \tilde{A}_1(0) = A_{10}, \quad (6.7)$$

$$\frac{d\tilde{A}_2}{dx} = -i\delta_2\tilde{A}_1^2 e^{i\Delta kx}, \quad \delta_2 > 0, \quad \tilde{A}_2(0) = 0, \quad (6.8)$$

де $\Delta k = k_2 - 2k_1 = 2\frac{\omega}{c}(n_2 - n_1)$, $\tilde{A}_{1,2}$ і $n_{1,2}$ – комплексні амплітуди та показники заломлення хвилі накачування (1) та хвилі з частотою 2ω (2), $\delta_{1,2}$ – дійсні коефіцієнти.

Розв’язок (6.7), (6.8) шукаємо у вигляді

$$\tilde{A}_{1,2} = A_{1,2} e^{i\varphi_{1,2}}. \quad (6.9)$$

Підставляючи (6.9) до (6.7), (6.8), отримаємо

$$\frac{dA_1}{dx} + iA_1 \frac{d\varphi_1}{dx} = -i\delta_1 A_1 A_2 e^{-i\Phi}, \quad (6.10)$$

$$\frac{dA_2}{dx} + iA_2 \frac{d\varphi_2}{dx} = -i\delta_2 A_1^2 e^{i\Phi}, \quad (6.11)$$

де $\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta kx$. Комплексні рівняння (6.10), (6.11) дозволяють знайти $A_{1,2}$ і $\varphi_{1,2}$. Виділимо у цих рівняннях дійсну частину:

$$\frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_1 A_2 \sin \Phi, \quad (6.12)$$

$$\frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_1^2 \sin \Phi. \quad (6.13)$$

Розв’язуючи цю систему, знайдемо $A_1(x)$ і $A_2(x)$.

6.2.2. Амплітуда другої гармоніки

З (6.13) видно, що джерелом хвилі (2) є хвиля накачування, причому $dA_2 / dx > 0$. Це означає, що амплітуда другої гармоніки зростає, а хвилі накачування – зменшується, оскільки $dA_1 / dx < 0$ (див. (6.12)). Максимальна взаємодія має місце при $\sin \Phi = 1$ (при $\sin \Phi = 0$ взаємодія відсутня). У цьому випадку рівняння (6.12), (6.13) зводяться до наступних:

$$\frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_1 A_2, \quad A_1(0) = A_{10}, \quad (6.14)$$

$$\frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_1^2, \quad A_2(0) = 0. \quad (6.15)$$

Розділивши верхнє рівняння на нижнє, отримаємо

$$\frac{dA_1}{dA_2} = -\frac{\delta_1}{\delta_2} \frac{A_2}{A_1}.$$

Звідси перший інтеграл системи (6.14), (6.15) має вигляд:

$$A_1^2 = A_{10}^2 - \frac{\delta_1}{\delta_2} A_2^2. \quad (6.16)$$

З урахуванням (6.14) рівняння (6.15) перетворюється на таке:

$$\frac{dA_2}{dx} = \delta_2 \left(A_{10}^2 - \frac{\delta_1}{\delta_2} A_2^2 \right). \quad (6.17)$$

З (6.17) випливає, що у глибині середовища (формально при $x \rightarrow \infty$) має місце максимальне значення квадрата амплітуди хвилі 2, що дорівнює

$$A_{2\infty}^2 = \frac{\delta_2}{\delta_1} A_{10}^2. \quad (6.18)$$

Тоді (6.17) з урахуванням (6.18) перепишеться як

$$\frac{dA_2}{dx} = \delta_1 A_{2\infty}^2 \left(1 - \frac{A_2^2}{A_{2\infty}^2} \right).$$

Розділяючи змінні та інтегруючи, отримаємо

$$A_2 = A_{2\infty} \operatorname{th}(\delta_1 A_{2\infty} x + C),$$

де з граничної умови $A_2(0) = 0$ знаходимо, що $C = 0$. Тоді

$$A_2(x) = A_{2\infty} \operatorname{th} \delta_1 A_{2\infty} x. \quad (6.19)$$

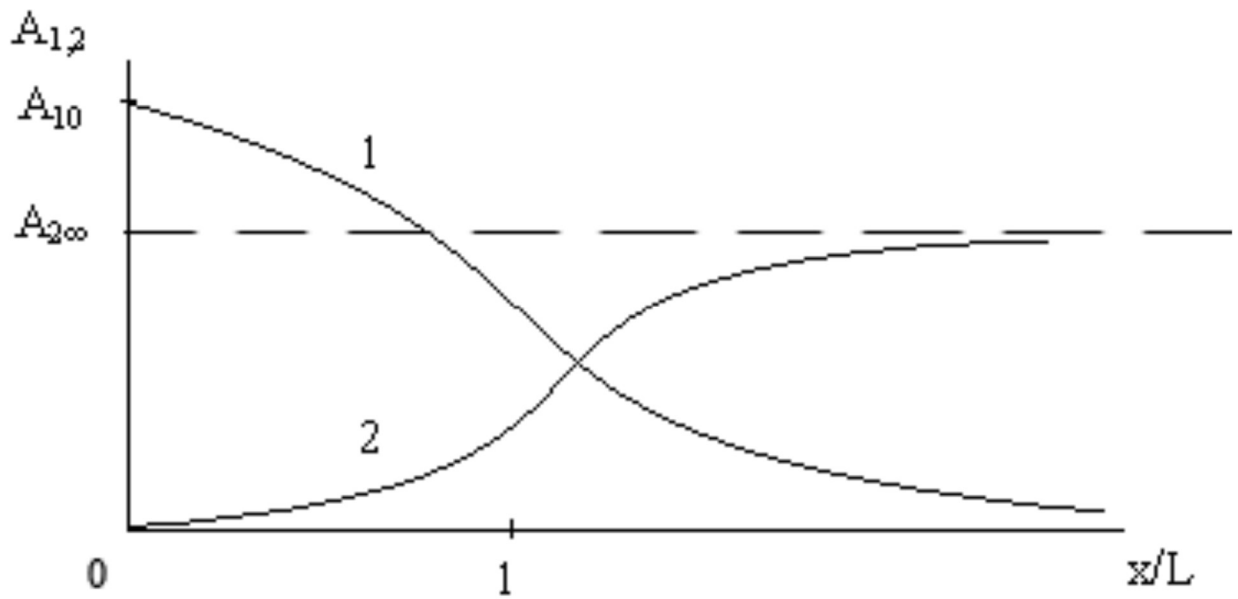


Рис. 6.1. Залежність амплітуди хвилі накачування (1) та другої гармоніки (2) від довжини взаємодії

Підстановка (6.19) до рівняння (6.16) з урахуванням (6.18) дає

$$A_1^2 = A_{10}^2 - \frac{\delta_1 \delta_2}{\delta_2 \delta_1} A_{10}^2 \operatorname{th}^2 \delta_1 A_{2\infty} x.$$

Звідси

$$A_1(x) = \frac{A_{10}}{\operatorname{ch} \delta_1 A_{2\infty} x}. \quad (6.20)$$

Залежності $A_1(x)$ і $A_2(x)$ показано на рис. 6.1.

З рис. 6.1 видно, що при $L = (\delta_1 A_{1\infty})^{-1}$ відбувається перекачування енергії хвилі накачування в енергію другої гармоніки. Ефективність енергетичних перетворень

$$\eta = \frac{A_{2\infty}^2}{A_{10}^2} = \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

складає величину $\sim 0,6 - 0,8$.

6.3. Задачі для самостійного розв'язання

6.1

Обчислити характерне поле для теплового механізму нелінійності в квантовій радіофізиці, густину потоку енергії та потужність лазера, якщо робочим тілом є газ із густиною $\rho = 1 \text{ кг/м}^3$, питомою теплоємністю $C = 10^3 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$, коефіцієнтом поглинання випромінювання $\kappa = 10^{-6}$, що знаходиться при температурі $T_0 = 300 \text{ К}$. Довжина зразка L , тривалість впливу τ та площа перерізу лазерного пучка S задано:

- а) $L = 1 \text{ см}$, $\tau = 10 \text{ с}$, $S = 1 \text{ мм}^2$;
- б) $L = 10 \text{ см}$, $\tau = 1 \text{ с}$, $S = 2 \text{ мм}^2$;
- в) $L = 10 \text{ см}$, $\tau = 10 \text{ с}$, $S = 5 \text{ мм}^2$;
- г) $L = 5 \text{ см}$, $\tau = 2 \text{ с}$, $S = 10 \text{ мм}^2$.

6.2

Обчислити характерне поле для теплового механізму нелінійності в квантовій радіофізиці, густину потоку енергії та потужність лазера, якщо робочим тілом є кристал із густиною $\rho = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, питомою теплоємністю $C = 5 \cdot 10^2 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$, коефіцієнтом поглинання випромінювання $\kappa = 10^{-5}$, що знаходиться при температурі $T_0 = 300 \text{ К}$. Довжина зразка L , тривалість впливу τ та площа перерізу лазерного пучка S задано:

- а) $L = 3 \text{ см}$, $\tau = 3 \text{ с}$, $S = 1 \text{ мм}^2$;
- б) $L = 5 \text{ см}$, $\tau = 10 \text{ с}$, $S = 2 \text{ мм}^2$;
- в) $L = 10 \text{ см}$, $\tau = 1 \text{ с}$, $S = 5 \text{ мм}^2$;
- г) $L = 10 \text{ см}$, $\tau = 10 \text{ с}$, $S = 10 \text{ мм}^2$.

6.3

Обчислити стрикційне поле, густину потоку енергії та потужність лазера, якщо робочим тілом є газ із модулем всебічного стиснення $K = 10^5 \text{ Н/м}^2$, збуренням відносної електричної проникності $\Delta\epsilon = 0,1$ та площею перерізу лазерного пучка $S = 1 \text{ мм}^2$.

6.4

Обчислити стрикційне поле, густину потоку енергії та потужність лазера, якщо робочим тілом є рідина з модулем всебічного стиснення $K = 5 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, збуренням відносної електричної проникності $\Delta\epsilon = 0,1$ та площею перерізу лазерного пучка $S = 1 \text{ мм}^2$.

6.5

Обчислити стрикційне поле, густину потоку енергії та потужність лазера, якщо робочим тілом є кристал із модулем всебічного стиснення $K = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², збуренням відносної електричної проникності $\Delta\epsilon = 0,1$ та площею перерізу лазерного пучка $S = 1$ мм².

6.6

Обчислити значення внутрішньоатомного поля, густину потоку енергії та потужність лазера, що впливає на речовину, при заданому розмірі радіусу атома та площі перерізу лазерного пучка $S = 1$ мм²:

а) $r_a = 0,1$ нм; б) $r_a = 0,2$ нм; в) $r_a = 0,4$ нм; г) $r_a = 0,6$ нм.

6.7

Обчислити радіус першої борівської орбіти, значення характерного поля при атомному механізмі нелінійності, необхідну густину потоку енергії та потужність лазера для впливу на речовину з метою створення нелінійного відгуку атомних осциляторів. Прийняти, що площа перерізу лазерного пучка дорівнює 1 мм².

6.8

Порівняти та пояснити значення напруженості електричного поля при атомному та релятивістському механізмах нелінійності.

6.9

Порівняти та пояснити значення напруженості електричного поля при атомному та вакуумному механізмах нелінійності.

6.10

Порівняти та пояснити значення напруженості електричного поля при релятивістському та вакуумному механізмах нелінійності.

6.11

Обчислити значення характерного поля при релятивістському механізмі нелінійності, густину потоку енергії та потужність лазера при заданій частоті електромагнітного випромінювання ω та площі перерізу лазерного пучка S :

а) $\omega = 10^{14}$ с⁻¹, $S = 1$ мм²; б) $\omega = 10^{15}$ с⁻¹, $S = 1$ мм²;
в) $\omega = 10^{16}$ с⁻¹, $S = 10$ мм²; г) $\omega = 5 \cdot 10^{16}$ с⁻¹, $S = 10$ мм².

6.12

Обчислити значення характерного поля при вакуумному механізмі нелінійності, густину потоку енергії та потужність лазера при заданій площі перерізу лазерного пучка S :

а) $S = 1$ мм²; б) $S = 0,1$ мм²; в) $S = 0,01$ мм²; г) $S = 0,001$ мм².

6.13

Обчислити енергію лазерного імпульсу, густину потоку енергії та об'ємну густину енергії при заданій потужності P лазера, тривалості імпульсу τ та перерізі пучка $S = 1 \text{ мм}^2$:

- а) $P = 10^{19} \text{ Вт}$, $\tau = 10 \text{ фс}$;
- б) $P = 10^{19} \text{ Вт}$, $\tau = 100 \text{ фс}$;
- в) $P = 10^{20} \text{ Вт}$, $\tau = 1 \text{ фс}$;
- г) $P = 10^{20} \text{ Вт}$, $\tau = 10^3 \text{ фс}$.

6.14

Обчислити енергію, об'ємну густину енергії та частоту випромінювання при анігіляції протону й антипротону. Порівняти із відповідними параметрами унікального лазера. Прийняти масу протону (антипротону) $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$, радіус протона $1 \text{ фм} = 10^{-15} \text{ м}$.

6.15

Знайти залежності амплітуди основної та другої гармонік від пройденної відстані при їх когерентній взаємодії у нелінійному середовищі. Обчислити ефективність енергетичних перетворень. Вважати, що $\delta_2 / \delta_1 = 0,7$, $\delta_1, \delta_2 > 0$.

При аналізі прийняти, що $A_{10} \gg A_{20}$.

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_1 A_2, & A_1(0) = A_{10}; \\ \frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_1 A_2, & A_2(0) = A_{20}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_0 A_2, & A_1(0) = A_{10}, \quad A_0 = \text{const}; \\ \frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_0 A_1, & A_2(0) = 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_1 A_2^2, & A_1(0) = A_{10}; \\ \frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_1^2 A_2, & A_2(0) = A_{20}; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_1^2 A_2^2, & A_1(0) = A_{10}; \\ \frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_1^2 A_2^2, & A_2(0) = A_{20}. \end{cases}$$

6.16

Обчислити ефективність генерації другої гармоніки при $A_{10} \gg A_{20}$, $\delta_1, \delta_2 > 0$ і $\delta_2 / \delta_1 = 0,8$, якщо двохвильова взаємодія описується наступною системою:

$$\begin{aligned}
 \text{а)} \quad & \begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_1 A_2^3, & A_1(0) = A_{10}; \\ \frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_1^3 A_2, & A_2(0) = A_{20}; \end{cases} \\
 \text{б)} \quad & \begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_1^2 A_2^2, & A_1(0) = A_{10}; \\ \frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_1^4, & A_2(0) = A_{20}; \end{cases} \\
 \text{в)} \quad & \begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_1^2 A_2^4, & A_1(0) = A_{10}; \\ \frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_1^4 A_2^2, & A_2(0) = A_{20}; \end{cases} \\
 \text{г)} \quad & \begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_1 A_2^4, & A_1(0) = A_{10}; \\ \frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_1^4 A_2, & A_2(0) = A_{20}. \end{cases}
 \end{aligned}$$



Розділ 7. НЕЛІНІЙНІ ЕФЕКТИ В ПЛАЗМІ

7.1. Основні поняття та співвідношення

Плазмою називається повністю або частково іонізований газ, який у середньому є квазінейтральним. Нелінійні ефекти при поширенні сильних електромагнітних хвиль у плазмі пов'язані з нагрівом електронів і важких частинок (значно меншим), виштовхуванням електронів у неоднорідному полі (електрострикцією), іонізацією (пробоєм) газу та нелінійністю сили Лоренца. Їм відповідає *нагрівний (тепловий), стрикційний, іонізаційний і магнітний або релятивістський* механізми нелінійності. Останній зазвичай малоістотний, іонізаційний механізм проявляється у дуже сильних полях. Тому найчастіше обмежуються розглядом теплового та стрикційного механізмів. Перший з них є головним у зіштовхувальній плазмі, другий – у беззіштовхувальній плазмі. Механізми стають істотними, якщо амплітуда електричного поля $E_0 \geq E_p, E_c$, де

$$E_p = \left(\frac{3kT_{e0}m\delta_0(\omega^2 + \nu_0^2)}{e^2} \right)^{1/2},$$

$$E_c = \left(\frac{4kT_{e0}m(\omega^2 + \nu_0^2)}{e^2} \right)^{1/2},$$

– плазмове та стрикційне поля. Тут T_{e0} , ν_0 – температура та частота зіткнень електронів (індекс "0" належить до незбурених умов), e і m – заряд і маса електрона, $\delta_0 \sim 10^{-4} - 10^{-3}$ – параметр зіштовхувань, k – стала Больцмана, $\omega = 2\pi f$ – кругова частота хвилі.

Відносна комплексна діелектрична проникність $\tilde{\epsilon}$ та її дійсна частина для ізотропної плазми дорівнюють:

$$\tilde{\varepsilon} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i\nu)},$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2},$$

де

$$\omega_p = \left(\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

– плазмова частота електронів, N – їх концентрація, ε_0 – електрична стала.

Для показників заломлення та поглинання справедливі наступні співвідношення:

$$n = \sqrt{\varepsilon} = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\kappa = \frac{\omega_p^2 \nu}{2\omega(\omega^2 + \nu^2)n}.$$

У стаціонарному випадку збурені значення T_e (в результаті нагрівання електронів) та N (за рахунок електрострикції) приблизно дорівнюють:

$$T_e = T_{e0} \left(1 + \frac{E_0^2}{E_p^2} \right), \quad N = N_0 \exp \left(-\frac{E_0^2}{E_c^2} \right).$$

У слабо і сильно іонізованій плазмі справедливі наступні залежності:

$$\nu = \nu_0 \left(\frac{T_e}{T_\infty} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\nu = \nu_0 \left(\frac{T_e}{T_\infty} \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

У системі СІ співвідношення, що зв'язує густину потоку енергії та напруженість поля, мають вигляд:

$$\Pi = \frac{P}{S} = \frac{E^2}{240\pi},$$

де P і S – потужність і площа перерізу пучка. При ізотропному випромінюванні $S = 4\pi R^2$, де R – відстань від випромінювача до заданої точки.

Пробій плазми під дією потужної електромагнітної хвилі описується наступним співвідношенням:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \nu_i N - \alpha_r N^2, \\ N(0) &= N_0, \end{aligned}$$

де ν_i – швидкість іонізації, α_r – коефіцієнт рекомбінації. У стаціонарному випадку $N_\infty = \nu_i / \alpha_r$.

Збурення концентрації електронів N за рахунок порушення іонізаційно-рекомбінаційного процесу описується наступним співвідношенням:

$$\frac{dN}{dt} = q_e - \alpha_r N^2, \quad N(0) = N_0,$$

де q_e – швидкість утворення електронів, α_r – коефіцієнт рекомбінації.

Збурення N за рахунок інтенсифікації процесу прилипання електронів до нейтралів описується наступним співвідношенням:

$$\frac{dN}{dt} = q_e - \beta_r N, \quad N(0) = N_0,$$

де β_r – швидкість прилипання.

В результаті порушення гідростатичної рівноваги в плазмі в стаціонарному випадку значення для N дається таким співвідношенням

$$N = N_0 \frac{(T_{e0} + T_{i0})}{T_e + T_i},$$

де $T_{e,i}$ – температури електронів та іонів, $T_{e0,i0}$ – те саме в незбуреному стані.

7.2. Приклади

Приклад 1

Для теплового самовпливу пучка в зітшовхувальній плазмі з частотою зіткнень $\nu = \nu_0 (T_e / T_{e0})^{1/2}$ оцінити величини критичного поля $E_{кр}$, критичної потужності $P_{кр}$, за яких настає ефект самоканалювання, а також фокусну відстань R_ϕ . Прийняти, що: $f_{p0} = 3 \cdot 10^9$ Гц, $f = 10^{10}$ Гц, $\nu_0 = 3 \cdot 10^9$ с⁻¹, $r_0 = 5$ см, $T_e = T_{e0} (1 + E^2 / E_p^2)$, де E_p – плазмове поле, $\delta_0 = 2 \cdot 10^{-3}$, r_0 – товщина пучка.

Розв'язання

Умова самоканалювання має вигляд:

$$\left| \frac{\epsilon_{нл}}{\epsilon_{л}} \right| \sim \frac{1}{k^2 r_0^2}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Визначимо послідовно $\epsilon_{л}, \epsilon_{нл}, E_p$. Спочатку, підставляючи у вираз для $\epsilon_{л}$ числові значення параметрів, переконаємось, що

$$\epsilon_{л} = 1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2 + \nu_0^2} \approx 1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} \approx 1.$$

Оскільки $\epsilon_{нл} = \epsilon - \epsilon_{л}$, то при $\omega^2 \gg \nu_0^2, \nu^2$

$$\epsilon_{нл} = \frac{\omega_{p0}^2 (\nu^2 - \nu_0^2)}{(\omega^2 + \nu_0^2)(\omega^2 + \nu^2)} \approx \frac{\omega_{p0}^2 (\nu^2 - \nu_0^2)}{\omega^4} = \frac{\omega_{p0}^2 \nu_0^2 \left(\frac{T_e}{T_{e0}} - 1 \right)}{\omega^4} = \frac{\omega_{p0}^2 \nu_0^2}{\omega^4} \frac{E^2}{E_p^2}.$$

Обчислимо E_p^2 :

$$E_p^2 = \frac{3kT_{e0}m\delta_0(\omega^2 + \nu_0^2)}{e^2} \approx 3 \cdot 10^6 \left(\frac{\text{В}}{\text{м}} \right)^2;$$

тоді

$$E_p \approx 1,7 \cdot 10^3 \left(\frac{\text{В}}{\text{м}} \right).$$

З умови самоканалювання маємо:

$$\frac{\omega_{p0}^2 \nu_0^2}{\omega^4} \cdot \frac{E_{\text{кр}}^2}{E_p^2} \sim \frac{1}{k^2 r_0^2}.$$

Після підстановки числових значень отримуємо

$$E_{\text{кр}} \approx 5.4 E_p \approx 9.4 \cdot 10^3 \left(\frac{\text{В}}{\text{м}} \right),$$

$$P_{\text{кр}} \approx \frac{E_{\text{кр}}^2 S}{240\pi} \approx 9.2 \cdot 10^2 \text{ Вт},$$

$$R_{\text{фкр}} \sim r_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\text{л}}}{\varepsilon_{\text{нл}}}} \approx \frac{r_0}{\sqrt{\varepsilon_{\text{нл}}}} \approx 2\pi r_0 \approx 31 \text{ см}.$$

З іншого боку

$$R_{\text{фкр}} \sim k r_0^2 = \frac{2\pi r_0^2}{\lambda} \approx 52 \text{ см}.$$

Обидві величини $R_{\text{фкр}}$ узгоджуються за порядком величини.

Приклад 2

Вважаючи, що в результаті нагрівання високочастотним ($\omega \gg \nu$) електромагнітним полем коефіцієнт поглинання хвилі змінюється згідно із законом

$$\alpha = \alpha_0 \frac{2}{1 + \theta},$$

де $\theta = \frac{T_e}{T_{e0}}$ дається рівнянням

$$\theta = 1 + \frac{E^2}{E_p^2},$$

а E_p – плазмове поле, отримати вираз для амплітуди та множника самовпливу як функції пройденої відстані. Проаналізувати їхню поведінку в глибині плазми, а також для випадку дуже сильної хвилі на межі плазми.

Розв'язання

Переходячи від укороченого рівняння для амплітуди хвилі E до її інтенсивності E^2 , маємо

$$\frac{dE^2}{dx} = -2\alpha E^2$$

або

$$\frac{dE^2}{dx} = -2\alpha \frac{2}{1 + \theta} E^2.$$

Введемо $y = E^2 / E_p^2$ і виключимо $\theta = 1 + y$ з рівняння для y :

$$\frac{dy}{dx} = -4\alpha_0 \frac{y}{y + 2}.$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$y^2 e^y = C e^{-4\alpha_0 x}.$$

З граничної умови при $x = 0$, $E = E(0)$ випливає, що $y = y_0$, де $y_0 = E^2(0) / E_p^2$. Тоді

$$y^2 e^y = y_0^2 e^{y_0} e^{-4k_0 x}; \quad k_0 = \alpha_0 x.$$

При $4k_0 \gg 1$ має місце $y \rightarrow 0$, а отже

$$y^2 \approx y_0^2 e^{y_0} e^{-4k_0}, \quad y \approx y_0 e^{\frac{1}{2}y_0} e^{-2k_0}.$$

Звідси

$$E(x) \approx E(0) \cdot e^{\frac{E^2(0)}{4E_p^2}} e^{-k_0}, \quad P_\infty(x) \approx e^{\frac{E^2(0)}{4E_p^2}}.$$

Легко бачити, що $P_\infty > 1$, тобто має місце ефект самопросвітлення плазми. При $E^2(0) \gg E_p^2$ маємо $P_\infty \gg 1$. У нелінійній теорії $E(x)$ зменшується зі зростанням x повільніше, ніж у лінійній (рис. 7.1). Залежність $P(x)$ наведено на рис. 7.2, а залежність E від $E(0)$ – на рис. 7.3.

Приклад 3

Діелектрична проникність плазми із зіштовхуваннями дорівнює:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2 + \nu^2},$$

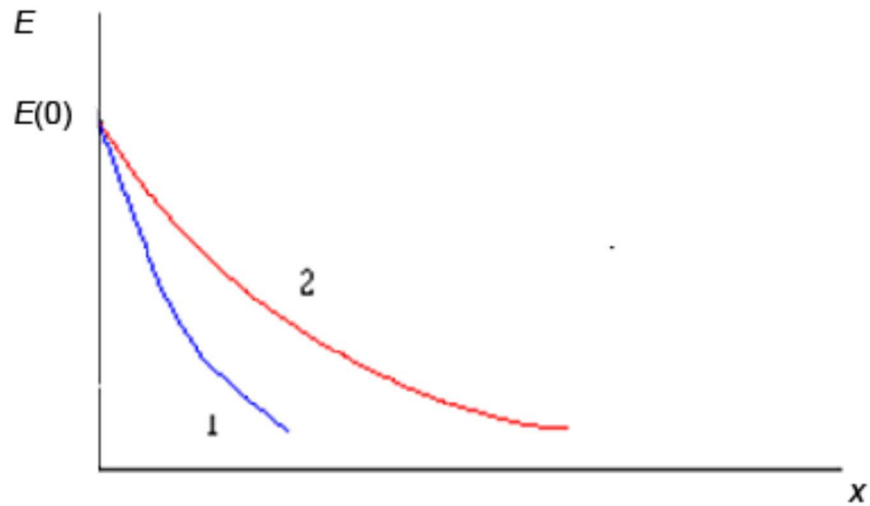
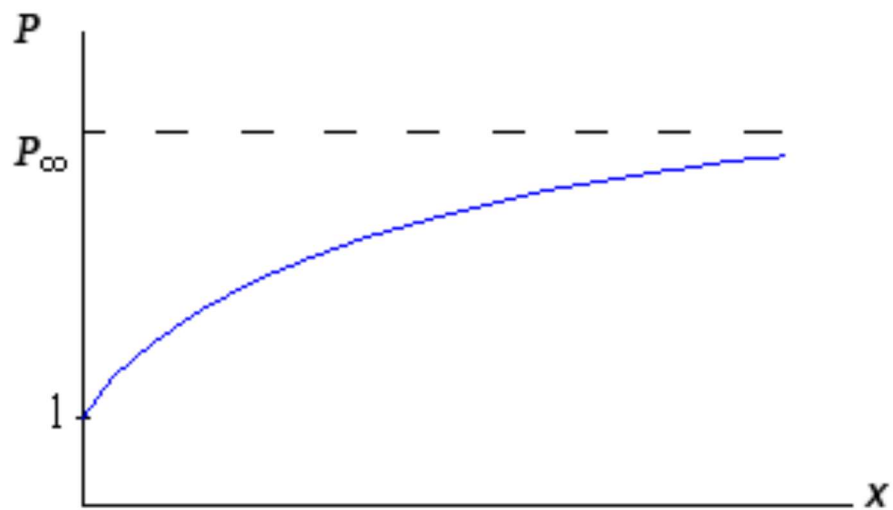
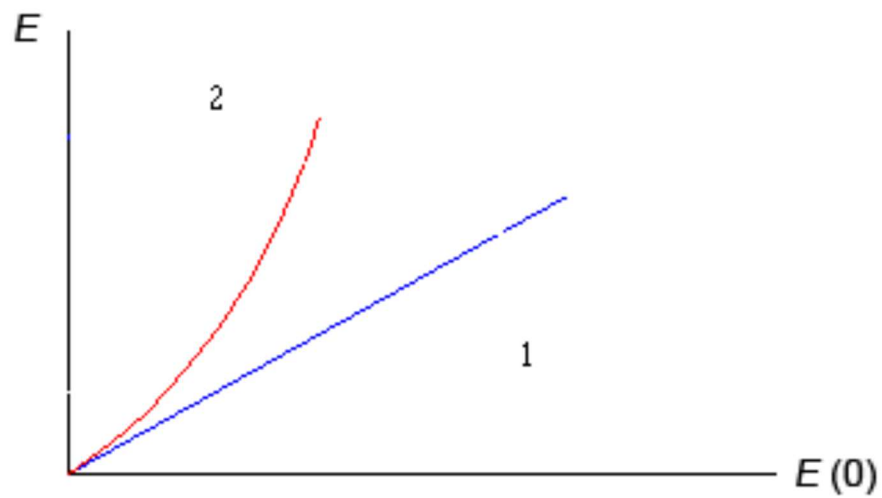
де $\nu = \nu(T_e)$ – частота зіштовхувань, T_e – температура електронів. Визначити, при якому співвідношенні між ν і $\nu_0 = \nu(T_{e0})$ має місце ефект самофокусування електромагнітного пучка.

Розв'язання

Самофокусування має місце при $\varepsilon_{\text{нл}} > 0$. Обчислимо $\varepsilon_{\text{нл}} = \varepsilon - \varepsilon_{\text{л}}$:

$$\varepsilon_{\text{нл}} = 1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2 + \nu^2} - \left(1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2 + \nu_0^2} \right) = \frac{\omega_{p0}^2 (\nu^2 - \nu_0^2)}{(\omega^2 + \nu_0^2) \cdot (\omega^2 + \nu^2)}.$$

Тоді $\varepsilon_{\text{нл}} > 0$, якщо $\nu > \nu_0$. Отже, при нагріванні електронів $\varepsilon_{\text{нл}}$ має збільшуватися. Це має місце у слабо іонізованій плазмі. При $\nu < \nu_0$ значення $\varepsilon_{\text{нл}} < 0$ і самофокусування відсутнє.

Рис. 7.1. Залежність E від x : 1 – у лінійній теорії, 2 – у нелінійній.Рис. 7.2. Залежність P від x .Рис. 7.3. Залежність E від $E(0)$: 1 – у лінійній теорії, 2 – у нелінійній.

7.3. Задачі для самостійного розв'язання

7.1

Лінійні плазмові коливання описуються наступною системою рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \frac{e}{m} \vec{E}, \\ \oint \vec{E} d\vec{S} &= \frac{Q}{\varepsilon_0}, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= -\oint \vec{j} d\vec{S}, \\ \vec{j} &= eN\vec{v},\end{aligned}$$

де $\vec{v}$ – швидкість електрона, що рухається під дією поля розділення заряду $\vec{E}$, S – поверхня, що охоплює заряд системи Q , ε_0 – електрична стала, $\vec{j}$ – густина електричного струму, e і m – заряд і маса електрона, N – концентрація електронів. Знайти розв'язок системи рівнянь при $Q(0) = 0$, $\partial Q / \partial t(0) = Q_0 \omega_p$, де Q_0 – амплітуда коливань, ω_p – плазмова частота електронів.

7.2

Для теплового самовпливу електромагнітного пучка в зіштовхувальній плазмі з частотою зіткнень

$$\nu = \nu_0 \left(\frac{T_e}{T_{e0}} \right)^{1/2}$$

оцінити величини критичного поля $E_{кр}$, критичної потужності $P_{кр}$, при яких настає ефект самоканалювання, а також фокусну відстань R_ϕ .

Прийняти, що

$$\nu_0 = 6 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}, \quad T_{e0} = 300 \text{ К}, \quad \delta_0 = 2 \cdot 10^{-3}, \quad T_e = T_{e0} \left(1 + E^2 / E_p^2 \right),$$

$$f_{p0} = 3 \cdot 10^9 \text{ Гц},$$

$$a) \quad r_0 = 4 \text{ см}, \quad f = 3 \cdot 10^{10} \text{ Гц}, \quad в) \quad r_0 = 4 \text{ см}, \quad f = 5 \cdot 10^{10} \text{ Гц},$$

$$б) \quad r_0 = 2 \text{ см}, \quad f = 5 \cdot 10^{10} \text{ Гц}, \quad з) \quad r_0 = 1,5 \text{ см}, \quad f = 7 \cdot 10^{10} \text{ Гц}.$$

Тут r_0 – радіус пучка, T_e – температура електронів, E_p – плазмові поле, f – частота хвилі.

7.3

Вважаючи, що внаслідок електрострикції концентрація електронів у плазмі змінюється за законом:

$$N = N_0 \left(1 - \frac{E^2}{E_c^2} \right),$$

де $E < E_c$, E_c – стрикційне поле, обчислити залежність амплітуди хвилі та множника самовпливу від пройденого шляху, проаналізувати їх поведінку в глибині середовища, а також при $E(0) \rightarrow E_c$. Врахувати, що коефіцієнт поглинання хвилі дорівнює $\alpha = \alpha_0 N / N_0$.

7.4

Вважаючи, що в результаті нагріву електронів плазми високочастотною ($\omega \gg \nu$) електромагнітною хвилею коефіцієнт поглинання змінюється згідно із законом

$$\alpha = \alpha_0 \frac{\nu}{\nu_0},$$

де ν – частота зіткнень електронів з нейтральними частинками, обчислити залежність амплітуди хвилі та множника амплітудного самовпливу від пройденого шляху. Проаналізувати їх поведінку в глибині плазми, а також для випадку дуже сильної хвилі на межі плазми. Прийняти, що у слабоіонізованій плазмі (у нижній іоносфері) $\nu = \nu_0 (T_e / T_{e0})$, а рівняння балансу енергії (температур T_e) електронів має вигляд:

$$\frac{T_e}{T_{e0}} = 1 + \frac{E^2}{E_p^2},$$

де E_p – плазмове поле.

7.5

Вважаючи, що в результаті нагріву електронів високочастотним ($\omega \gg \nu$) електромагнітним полем коефіцієнт поглинання змінюється згідно із законом

$$\alpha = \frac{2}{1 + \theta} \alpha_0, \text{ де } \theta = \frac{T_e}{T_{e0}} \text{ дається рівнянням балансу енергії електронів:}$$

$$\theta = 1 + E^2 / E_p^2,$$

де E_p – плазмове поле. Отримати вирази для амплітуди і множника самовпливу хвилі в залежності від пройденої відстані. Проаналізувати їхню поведінку в глибині плазми, а також для випадку дуже сильної хвилі на межі плазми.

7.6

Вважаючи, що внаслідок нагріву електронів слабоіонізованої плазми ($\nu = \nu_0 \theta$, $\theta = T_e / T_{e0}$) високочастотною ($\omega \gg \nu$) електромагнітною хвилею коефіцієнт поглинання змінюється згідно із законом $\alpha = \alpha_0(\nu / \nu_0) = \alpha_0 \theta$, обчислити нелінійний доданок до фази в залежності від пройденої відстані. Проаналізувати величину ефекту в глибині середовища при слабкому та дуже сильному полі на межі плазми. Прийняти, що рівняння балансу енергії електронів має вигляд:

$$\theta = 1 + E^2 / E_p^2,$$

де E_p – плазмове поле, а показник заломлення середовища дорівнює

$$n = 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2}.$$

7.7

Вважаючи, що внаслідок електрострикції концентрація електронів у плазмі змінюється за законом:

$$N = N_0 \left(1 - \frac{E^2}{E_c^2} \right),$$

де $E < E_c$, E_c – стрикційне поле, обчислити нелінійний доданок до фази, обумовлену самовпливом високочастотної ($\omega \gg \nu$) хвилі, як функцію пройденого шляху. Проаналізувати величину ефекту в глибині плазми при $E(0) \rightarrow E_c$. Прийняти, що коефіцієнт поглинання та показник заломлення відповідно дорівнюють $\alpha = \alpha_0 N / N_0$, $n = 1 - \omega_p^2 / (2\omega^2)$, де ω_p – плазмова частота.

7.8

Показати, що стрикційний самовплив електромагнітного пучка в плазмі призводить до його самофокусування. Прийняти, що

$$N = N_0 \exp(-E^2 / E_c^2).$$

7.9

Амплітуда поля електромагнітної хвилі вдесятеро перевищує плазмове поле. У скільки разів змінилася температура електронів?

7.10

Під впливом потужної електромагнітної хвилі температура електронів збільшилася вдвічі. У скільки разів змінився коефіцієнт прилипання $\beta_a = \beta_{a0} T_e / T_{e0}$ та концентрація електронів N ?

7.11

Амплітуда поля електромагнітної хвилі в 2 рази перевищує стрикційне поле E_c . У скільки разів змінилася концентрація електронів N ?

7.12

Під дією потужної електромагнітної хвилі T_e збільшилася вдвічі, а T_i залишилася незмінною. У скільки разів змінилася концентрація електронів N в результаті процесів перенесення (дифузії та термодифузії)? Дано, що $T_{e0} = T_{i0}$.

7.13

Пробій плазми описується наступним рівнянням балансу:

$$\frac{dN}{dt} = q_i - \alpha_r N^2,$$

де N – концентрація електронів, $q_i = \nu_i N$, $\nu_i = 10^9 \text{ с}^{-1}$, $\alpha_r = 10^{-13} \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}$, $N_0 = 10^8 \text{ м}^{-3}$.

- а) Знайти стаціонарний розв'язок рівняння балансу й обчислити N_∞ .
- б) Знайти час становлення N .
- в) Знайти нестационарний розв'язок рівняння балансу. Побудувати графік та проаналізувати розв'язок.
- г) Вивчити процес релаксації N після вимкнення поля.

7.14

Процес прилипання ефективно йде при потрібних зіткненнях електрона із двома молекулами повітря. Отримати диференціальне рівняння, що описує змі-

ну концентрації електронів N в часі. Врахувати процеси утворення електронів та їх прилипання. Знайти стаціонарний і нестаціонарний розв'язки рівняння балансу, а також час становлення N . Вивчити процес релаксації N .

7.15

За результатами задачі 7.13 вирахувати обчислити зміну N і t_N при коефіцієнті прилипання $\beta_0 = 10^{-42} \text{ м}^6 \text{ с}^{-1}$ для земної атмосфери на наступних висотах:

- а) $z = 0 \text{ км}$, $N_n = 3 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$, $q = 10^3 \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1}$;
- б) $z = 30 \text{ км}$, $N_n = 3 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$, $q = 10^3 \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1}$;
- в) $z = 60 \text{ км}$, $N_n = 3 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$, $q = 10^9 \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1}$.

Вважати, що $\beta = 2\beta_0$.



Розділ 8. НЕЛІНІЙНІ ЕФЕКТИ В ІОНОСФЕРНІЙ І КОСМІЧНІЙ ПЛАЗМІ

8.1. Основні поняття та співвідношення

Короткі відомості про геокосмос. Земля оточена газовою оболонкою, яка називається *атмосферою*. Її параметри переважно змінюються з висотою z . В ізотермічній атмосфері, коли температура газу $T_n(z) = \text{const}$, для тиску p та концентрації нейтралів є справедливою *барометрична формула*:

$$p(z) = p(0) \exp(-z / H),$$
$$N_n(z) = N_n(0) \exp(-z / H),$$

де $H = kT_n / m_n g \sim 10$ км – приведена висота, m – маса молекул, g – прискорення вільного падіння.

Під дією електромагнітного та корпускулярного випромінювань Сонця атмосфера на висотах $z \geq 50$ км *іонізується*. Іонізована частина атмосфери називається *іоносферою*. Верхня межа останньої перебуває на висоті $z \approx 1000$ км. При $z \leq 200$ км іоносфера є слабо іонізованою плазмою в тому сенсі, що $\nu_{en} \gg \nu_{ei}$. На висотах $z \geq 200$ км плазму можна вважати сильно іонізованою ($\nu_{ei} \gg \nu_{en}$).

Висотні профілі концентрації електронів наведені на рис. 8.1.

Іоносфера складається з *областей* або шарів: C ($z \approx 50 - 70$ км), D (70 – 90 км), E (90 – 120 км) і F (120 – 1000 км). Крім того, іоносферу умовно поділяють на нижню (50 – 100 км), середню (100 – 300 км), і зовнішню (300 – 1000 км). Параметри іоносфери істотно залежать від часу доби, сезону, сонячної активності та магнітної збуреності. Однак у всіх випадках зберігаються області іоносфери та її головний максимум на висотах $\sim 300 - 400$ км для дня та ночі відповідно. Його поява обумовлена дією двох *конкуруючих* процесів:

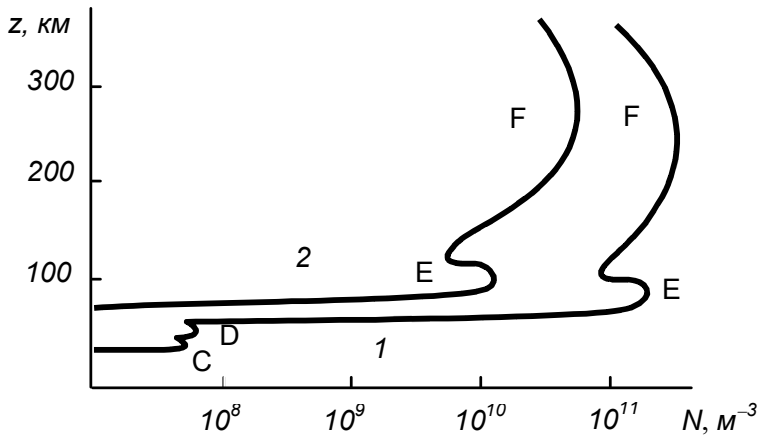


Рис. 8.1. Залежність концентрації електронів від висоти: 1 – день; 2 – ніч

падінням $N_n(z)$ і дифузійними процесами на великих висотах, а також поступовим поглинанням ультрафіолетового випромінювання Сонця на менших висотах.

При $z \leq 100$ км динамічні процеси (вітри, вихори тощо) в іоносфері приблизно такі ж, як і в нейтральній атмосфері. На висотах $z \geq 100$ км все більше позначаються електродинамічні процеси (струми, електромагнітні сили тощо), а також вплив геомагнітного поля. Роль останнього стає визначальною на висотах $z \geq 1000$ км, у так званій *магнітосфері*. Під магнітосферою розуміється частина навколоземного простору, заповненого геомагнітним полем і захопленими ним частинками. Захоплені геомагнітними пастками частинки утворюють *радіаційний пояс* Землі. Частинки рухаються спіральними траєкторіями вздовж силових ліній $\vec{B}$, а також дрейфують у поперечному по відношенню до $\vec{B}$ напрямку (електрони на схід, а протони на захід). Умовно сприймається, що верхня межа магнітосфери перебуває на відстанях $\sim 10R_3$ (R_3 – радіус Землі). За рахунок *сонячного вітру* (тобто потоку плазми з "вмороженим" магнітним полем) магнітосфера є асиметричним утворенням.

Механізми нелінійних явищ. Для навколоземного середовища, у принципі, можуть мати місце такі механізми:

- ✓ тепловий;
- ✓ стрикційний;
- ✓ іонізаційний;
- ✓ релятивістський.

Характерні поля задовольняють нерівностям

$$E_p \ll E_s \ll E_i \ll E_r.$$

Теплова (або нагрівна) нелінійність проявляється у вельми слабких полях. Наприклад, для $\omega \sim 10^6 \text{ с}^{-1}$ (або $f \sim 10^5 \text{ Гц}$) в нижній іоносфері $E_p \sim 10^{-2} - 10^{-1} \text{ В/м}$. Такі поля створюються установкою з ефективною потужністю $PG \sim$

10^5 Вт. Зауважимо, що ще в 1960-ті рр. була створена система з $PG \sim 10^9$ Вт на частоті $f \sim 1$ МГц. При цьому $E_p \sim 10^{-1} - 1$ В/м, $E \sim 1 - 10$ В/м.

Теплова нелінійність є істотною у всіх областях іоносфери та в магнітосфері.

При стрикційному механізмі нелінійності $E_s \approx (10 - 100)E_p$. Ця нелінійність здійснюється за $\omega \gg \nu$, а також $L \ll l_e$ (L – характерний масштаб неоднорідності поля, l_e – довжина вільного пробігу електронів). Вона має практичне значення в F області іоносфери та в магнітосфері.

Іонізаційний механізм нелінійності практично ще не використовувався.

Релятивістський механізм для навколоземної плазми є малоістотним.

Крос-модуляція радіохвиль. Потужна модульована за амплітудою радіохвиля E_1 , поширюючись в іоносфері, модулює її параметри і, насамперед, температуру електронів T_e та ефективну частоту зіткнень електронів ν . Ці збурення позначаються на амплітуді іншої радіохвилі E_2 , яка після проходження збуреної області також стає модульованою за амплітудою та фазою. Цей ефект називається *крос-модуляцією*, або *перехресною модуляцією*. Він належить до класичних нелінійних ефектів у іоносфері.

Припустимо, що потужність (інтенсивність) хвилі, що збурює, змінюється за гармонічним законом:

$$E_1^2 = E_{10}^2(1 + \mu \cos \Omega t),$$

μ – глибина модуляції, Ω – частота модуляції. Тоді в наближенні малих збурень при вертикальному падінні збурюючої та збурюваної радіохвиль на нижню іоносферу вираз для глибини крос-модуляції набуває вигляду:

$$\mu_\Omega = \frac{1}{2} \frac{\gamma(0)\mu}{\sqrt{1 + \Omega_1^2}} \frac{\omega_2^2 - \nu_0^2}{\omega_2^2 + \nu_0^2} \frac{\omega_1^2 + \nu_0^2}{\omega_2^2 + \nu_0^2} \left(1 - e^{-2K_{10}}\right), \quad (8.1)$$

де $\gamma(0) = E_{10}^2(0) / E_{p1}^2$ – безрозмірна інтенсивність збурюючої хвилі на межі іоносфери (вважається, що $\gamma(0) \ll 1$), ω_1 , ω_2 – частоти збурюючої та збурюваної радіохвиль, ν_0 – частота зіткнень електронів з нейтралами в незбуреній нижній іоносфері, K_{10} – інтегральний коефіцієнт поглинання збурюючої радіохвилі в незбуреній нижній іоносфері, $\Omega_1 = \Omega / \delta_0 \nu_0$, $\delta_0 = 3 \cdot 10^{-3}$ – параметр зіткнень електронів із нейтралами.

Самомодуляція радіохвиль. Збурення надають зворотний вплив на хвилю E_1 . При цьому вона набуває додаткової модуляції:

$$E_1^2 = E_{10}^2 (1 + \mu \cos \Omega t) (1 - \mu_\Omega \cos(\Omega t - \varphi_\Omega)),$$

де μ_Ω наближено дається виразом, аналогічним виразові для μ_Ω у теорії крос-модуляції, в якому необхідно покласти $\omega_1 = \omega_2$:

$$\mu_\Omega = \frac{1}{2} \frac{\gamma(0)\mu}{\sqrt{1 + \Omega_1^2}} \frac{\omega_1^2 - \nu_0^2}{\omega_1^2 + \nu_0^2} (1 - e^{-2K_{10}}). \quad (8.2)$$

Важливо, що $|\mu_\Omega| \leq \mu$. При цьому у спектрі модуляції хвилі E_1 з'являються гармоніки із частотою 2Ω . Процес спотворення форми модуляції сильної радіохвилі ілюструється на рис. 8.2.

Самомодуляція радіохвилі також є класичним ефектом, який, як і крос-модуляція, є *небажаним* при іоносферному радіозв'язку та радіомовленні. Ці нелінійні ефекти обмежують потужність радіостанцій ДХ та СХ діапазонів величиною $PG_{\max} \sim 100 - 500$ кВт.

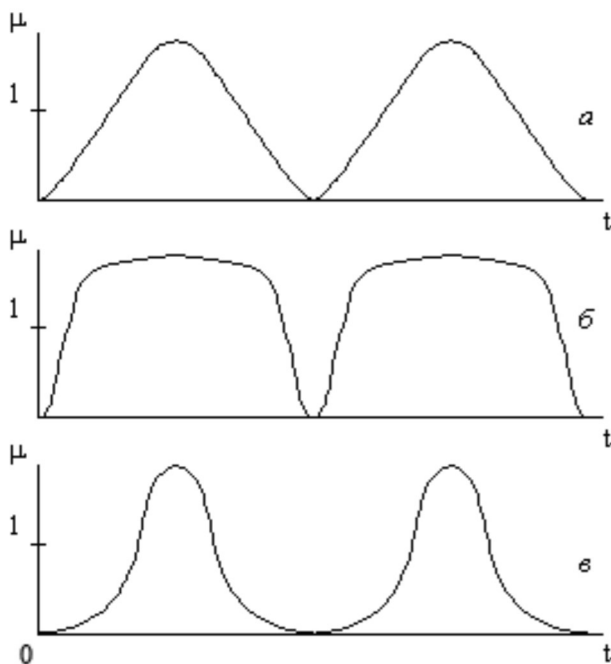


Рис. 8.2. Залежність форми модуляції:
а – в лінійній теорії;
б – у випадку ефекту помутніння плазми;
в – у випадку ефекту просвітління плазми.

Сучасні ефекти. До них належать генерація самофокусувальної, резонансної, параметричної, розпадної й інших типів нестійкостей, а також ефект Г. Г. Гетьманцева, генерація солітонів у геокосмосі, великомасштабних (глобальних) збурень у геокосмосі та ін.

Дослідження впливу потужного радіовипромінювання на атмосферу та геокосмос становлять інтерес із прикладної точки зору. Сюди належить створення нових каналів радіозв'язку, заснованих на ракурсному розсіянні радіохвиль, відбитті радіохвиль від штучного плазмового дзеркала в атмосфері тощо. Збурення, створювані потужним радіовипромінюванням, можуть бути як кори-

Таблиця 8.1. Класифікація радіохвиль

Назва смуги частот	Смуга частот	Діапазон довжин хвиль	Назва діапазонів хвиль
Дуже низькі (ДНЧ, VLF)	3–30 кГц	100–10 км	Міріаметрові
Низькі (НЧ, LF)	30–300 кГц	10–1 км	Кілометрові
Середні (СЧ, MF)	0,3–3 МГц	1–0,1 км	Гектометрові
Високі (ВЧ, HF)	3–30 МГц	100–10 м	Декаметрові
Дуже високі (ДВЧ, VHF)	30–300 МГц	10–1 м	Метрові
Ультрависокі (УВЧ, UHF)	0,3–3 ГГц	1–0,1 м	Дециметрові
Надвисокі (НВЧ, SHF)	3–30 ГГц	10–1 см	Сантиметрові
Вкрай високі (ВВЧ, EHF)	30–300 ГГц	10–1 мм	Міліметрові
Гіпервисокі (ГВЧ, HNF)	0,3–3 ТГц	1–0,1 мм	Дециміліметрові

сними (наприклад, для керування поширенням радіохвиль різних діапазонів, або діагностики геокоsmічної плазми), так і шкідливими (наприклад, збурення обмежують потужність перспективних сонячних енергетичних станцій, збурення можуть створювати нові екологічні проблеми тощо)

Діапазони радіохвиль. Існує наступна міжнародна класифікація радіохвиль (табл. 8.1).

Особливості поширення радіохвиль. Радіохвилі ДНЧ діапазону слабо проникають в іоносферу. Вони поширюються на глобальні відстані (10–40 тис. км) у хвилеводі, що утворено поверхнею Землі та іоносферою. Проникають під воду та поверхню суші на глибину 10–30 м.

Радіохвилі НЧ-діапазону добре дифрагують навколо поверхні Землі, проникають в іоносферу до висот 80–110 км в денний і нічний час доби відповідно. Поширюються на відстані 3–10 тис. км.

Радіохвилі СЧ-діапазону проникають в іоносферу до висот 90–130 км у денний і нічний час доби відповідно. Поширюються за допомогою земної хвилі, дифрагуючи навколо Землі, на відстані до 500–700 км та іоносферної хвилі, відбиваючись від іоносфери, на відстані 100–2000 км.

Радіохвилі ВЧ-діапазону, як і СЧ-діапазону, також поширюються за допомогою земної хвилі на відстані 50–100 км та іоносферної хвилі на відстані 1–10 тис. км. На відстані 100–1000 км має місце «мертва зона», прийом сигналів

тут неможливий. Радіохвилі ВЧ-діапазону в залежності від частоти і часу доби проникають в іоносферу на висоти 200–400 км і навіть пронизують її.

Радіохвилі ДВЧ–ГВЧ-діапазонів за допомогою земної хвилі поширюються на відстані не більше ніж 20–50 км. Їм властиве практично прямолінійне поширення. Хвилі вільно проникають крізь іоносферу. Широко використовуються не тільки на наземних, а й у космічних радіолініях.

8.2. Приклади

Приклад 1

Обчислити величину плазмового поля в нижній іоносфері для радіохвилі, що має частоту $f_1 = 1$ МГц та потужність $P_1 = 1$ МВт. Вважати, що $\nu_0 = 10^6 \text{ с}^{-1}$, $T_{e0} = 250 \text{ К}$, $\delta_0 = 3 \cdot 10^{-3}$.

Розв'язання

За визначенням

$$E_p^2 = \frac{3kT_{e0}m\delta_0(\omega_1^2 + \nu_0^2)}{e^2},$$

де $\omega_1 = 2\pi f_1$, $k \approx 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж / К}$ – стала Больцмана, $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$.

Обчислюючи, отримаємо $E_p \approx 0,20 \text{ В / м}$.

Приклад 2

Для умов попереднього прикладу обчислити напруженість електричного поля радіохвилі на висоті $z = 75 \text{ км}$, якщо інтегральний коефіцієнт поглинання $K_{10} = 0,5$.

Вказівка. У цій та інших подібних задачах напруженість електричного поля радіохвилі на відстані R від радіопередавального пристрою в системі СІ слід розраховувати за формулою:

$$E_1(R) = \frac{\sqrt{60P_1G_1}}{R} e^{-K_{10}},$$

де P_1 – потужність радіопередавального пристрою, G_1 – коефіцієнт підсилення антени.

Розв'язання

Оскільки радіостанція мовна, то $G \approx 1$.
Тому при $R = z = 75 \text{ км}$

$$E_1 = \frac{\sqrt{60 \cdot 10^6 \cdot 1}}{7,5 \cdot 10^4} e^{-0,5} \approx 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ В / м.}$$

Приклад 3

Виходячи з умов, наведених у прикладах 1 і 2, обчислити величину відносної зміни температури електронів і частоти зіткнень електронів із нейтралами. Вважати, що частота зіткнень є пропорційною температурі електронів.

Розв'язання

Зі стаціонарного розв'язку рівняння балансу електронів випливає, що

$$\frac{T_e - T_{e0}}{T_{e0}} = \frac{E_{10}^2}{E_{p1}^2}.$$

Тоді

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{T_e - T_{e0}}{T_{e0}} = \frac{E_{10}^2}{E_{p1}^2}.$$

Виконуючи обчислення, отримаємо, що відносні збурення як температури, так і частоти зіткнення приблизно дорівнюють 0,1.

Приклад 4

Виходячи з умов, наведених у прикладах 1, 2 та 3, обчислити глибину крос-модуляції, якщо частота $f_2 = 2 \text{ МГц}$, $F = 1 \text{ кГц}$ – частота модуляції, $\mu = 0,2$.

Розв'язання

Скористаємося формулою (8.1):

$$\mu_\Omega = \frac{1}{2} \frac{\gamma(0)\mu}{\sqrt{1 + \Omega_1^2}} \frac{\omega_2^2 - \nu_0^2}{\omega_2^2 + \nu_0^2} \frac{\omega_1^2 + \nu_0^2}{\omega_2^2 + \nu_0^2} \left(1 - e^{-2K_{10}}\right).$$

Підставляючи до неї числові значення, отримаємо, що $\mu_{\Omega} = 7,4 \cdot 10^{-3}$.

Приклад 5

Виходячи з умов, наведених у прикладах 1, 2, 3 та 4 оцініть глибину самомодуляції.

Розв'язання

Скористаємося формулою (8.2):

$$\mu_{\Omega} = \frac{1}{2} \frac{\gamma(0)\mu}{\sqrt{1 + \Omega_1^2}} \frac{\omega_1^2 - \nu_0^2}{\omega_1^2 + \nu_0^2} (1 - e^{-2K_{10}}),$$

Підставляючи до неї числові значення, отримаємо, що $\mu_{\Omega} = 7,4 \cdot 10^{-3}$.

8.3. Задачі для самостійного розв'язання

8.1

Оцінити можливість нагрівання електронів під дією потужної радіосистеми:

а) радіостанція мовлення, $f = 0,5 \text{ МГц}$, $P = 1 \text{ МВт}$, $G \approx 1$, відстань $R \approx 70 \text{ км}$, $K_0 \approx 1$;

б) радар декаметрового діапазону, $f = 5 \text{ МГц}$, $P = 3 \text{ МВт}$, $G \approx 1000$, відстань $R \approx 700 \text{ км}$, $K_0 \approx 0$;

в) космічний радар, $f = 1000 \text{ МГц}$, $P = 100 \text{ МВт}$, $G \approx 10^6$, відстань $R \approx 100 \text{ км}$, $K_0 \approx 0$.

Вважати, що $\nu_0 = 10^6 \text{ с}^{-1}$, $T_{e0} = 250 \text{ К}$, $\delta_0 = 3 \cdot 10^{-3}$.

8.2

Оцінивши збурення температури електронів, перевірити, чи може бути ефект крос-модуляції, якщо потужність радіомовної станції становить 150 кВт, частота радіохвилі – 100 кГц. Впливом магнітного поля знехтувати. Прийняти, що частота зіткнень електронів дорівнює 10^5 с^{-1} , незбурена температура електронів – 300 К, відносна частку енергії, що втрачається електроном при зіткненні з важкою частинкою – $3 \cdot 10^{-3}$, інтегральний коефіцієнт поглинання хвилі – 0,5 і 2,3 для нічного та денного часу доби відповідно.

8.3

Оцінити роль ефекту саомодуляції для радіостанції мовлення потужністю 1,5 МВт. Частота випромінювання 500 кГц. Прийняти частоту зіткнень рівною 10^5 с^{-1} , $T_{e0} = 300 \text{ К}$, $\delta_0 = 3 \cdot 10^{-3}$, $2k_0 \gg 1$.

8.4

Потужність радіоцентру становить 0,5 МВт, частота радіопередавального пристрою – 1 МГц. Оцінити можливість прояву теплового механізму нелінійності й ефектів крос-модуляції та саомодуляції. Параметри іоносферного шару на висоті 80 км такі: температура електронів – 250 К, частота зіткнень електронів – 10^6 с^{-1} , інтегральний коефіцієнт поглинання для нічного та денного часу становить 0,2 і 1,2 відповідно, $\delta_0 = 3 \cdot 10^{-3}$.

8.5

У 1925 р. Бейлі запропонував здійснити пробій в іоносфері на висоті близько 100 км за допомогою потужної радіостанції мовлення, що працює на гірчастоті електронів. Чи міг бути реалізований цей задум, якщо потужність радіостанції не перевищувала 100 кВт? Прийняти, що на висоті 100 км частота зіткнень дорівнює 10^5 с^{-1} , інтегральний коефіцієнт поглинання $K = 0,1$ і $1,15$ для нічного та денного часу доби відповідно.

8.6

Виходячи з виразу для глибини крос-модуляції в іоносфері:

а) побудувати залежності глибини крос-модуляції від частот збурюючої та слабкої радіохвиль;

б) оцінити глибину крос-модуляції при напруженості поля збурюючої радіохвилі, що дорівнює плазмовому полю. Вважати, що глибина модуляції дорівнює 1, частота модуляції $\Omega \ll \delta_0 \nu_0$. Розглянути випадки, коли $\omega_{1,2}^2 \ll \nu_0^2$ і $\omega_{1,2}^2 \gg \nu_0^2$.

8.7

При пробіі атмосфери на висоті 30 км утворилася концентрація електронів 10^{22} м^{-3} . Оцінити частоту радіохвилі, яка ще зможе відбиватися від штучної іонізованої області.

8.8

Параметри сонячної енергетичної станції такі: потужність – 10 ГВт, коефіцієнт підсилення антени – 10^9 , частота радіохвилі – 3 ГГц. Чи може НВЧ пучок зробити помітні збурення в максимумі іонізації (F-області іоносфери)? До чого це призведе? Прийняти $T_{e0} = 1000 \text{ К}$, $\delta_0 = 10^{-4}$.

8.9

Оцінити ефективну площу розсіювання при ракурсному розсіянні радіохвиль частотою 30 – 300 МГц. Прийняти $f_p = 5$ МГц, кількість неоднорідностей $n = L / \lambda$, де $L \approx 100$ км, λ – довжина радіохвилі, $R = 2000$ км.

8.10

При ракурсному розсіянні радіохвиль висота області, що розсіює, дорівнює $z_s \approx 300$ км. Обчислити максимальну дальність радіозв'язку, рівну $R_{\max} = 2\sqrt{2z_s R_E}$, де R_E – радіус Землі.

8.11

Оцінити частотну ємність радіодіапазонів від ДНЧ до ГВЧ та кількість каналів зв'язку (радіотелеграф смуга частот $\Delta f_1 = 300$ Гц), радіомовлення з АМ і FM ($\Delta f_1 = 9$ кГц, $\Delta f_1 = 50$ кГц), телебачення ($\Delta f_1 = 9$ МГц), стільниковий телефон ($\Delta f_1 = 30$ кГц)) та максимальну дальність поширення радіосигналів.

8.12

Для створення штучного плазмового дзеркала потрібні два радіопередавальні пристрої з імпульсною потужністю 1 ГВт, тривалістю імпульсу 10 нс, частотою повторення імпульсів 1 кГц. Оцінити середню та споживану потужності, якщо ККД системи складає 20 %. Чи може бути реалізована така система?

8.13

Отримати рівняння радіозв'язку

$$P_r = \frac{P_t G \sigma S}{(4\pi R_1 R_2)^2},$$

де P_r – потужність на вході радіоприймального пристрою, P_t – потужність радіопередавального пристрою, G – коефіцієнт підсилення радіопередавальної системи, σ – ефективна площа розсіювання ретранслюючого об'єкта, S – ефективна площа приймальної антени, R_1 – відстань від радіопередавального пристрою до ретранслюючого об'єкта, R_2 – відстань від ретранслюючого об'єкта до радіоприймального пристрою. Обчислити P_r при заданих параметрах каналу зв'язку:

а) $P_t = 1$ кВт, $G = 10$, $\sigma = 3 \cdot 10^6$ м², $S = 5$ м², $R_1 = 400$ км, $R_2 = 300$ км;

- б) $P_t = 2$ кВт, $G = 10$, $\sigma = 10^6$ м², $S = 3$ м², $R_1 = 350$ км, $R_2 = 450$ км;
 в) $P_t = 3$ кВт, $G = 15$, $\sigma = 3 \cdot 10^5$ м², $S = 2$ м², $R_1 = R_2 = 350$ км;
 г) $P_t = 10$ кВт, $G = 20$, $\sigma = 10^5$ м², $S = 1$ м², $R_1 = R_2 = 400$ км.

8.14

Оцінити еквівалентний розмір штучної антени в іоносфері, що виникає при ефекті Г. Г. Гетьманцева. Висота іоносферного струмового струменя – 100 км, ширина діаграми спрямованості наземного нагрівального стану – 6°.

8.15

Виходячи з роторного рівняння Максвелла, оцінити амплітуду магнітної компоненти електромагнітної хвилі, що генерується при ефекті Г. Г. Гетьманцева. Вважати, що амплітуда промодульованої густини струму становить 10 % від амплітуди густини струму j_0 в іоносферному струмовому струмені, товщина якого дорівнює 30 км. Прийняти $j_0 = 10^{-6}$ А/м².

8.16

Оцінити збурення температури електронів у F-області іоносфери НВЧ пучком радіохвиль, що випромінюється сонячною енергетичною станцією на геостационарній орбіті. Чи змінюється при цьому концентрація електронів? До чого можуть призвести такі збурення?

- а) $P = 1$ ГВт, $G = 10^8$; б) $P = 10$ ГВт, $G = 10^8$;
 в) $P = 10$ ГВт, $G = 10^9$; г) $P = 1$ ГВт, $G = 10^9$.

8.17

Якою має бути площа та розміри сонячних панелей сонячної енергетичної станції на геостационарній орбіті для отримання заданої потужності при заданому ККД? Ефективність сонячних панелей – 100 Вт/м².

- а) $P = 1$ ГВт, $\eta = 10$ %; б) $P = 5$ ГВт, $\eta = 20$ %;
 в) $P = 1$ ГВт, $\eta = 30$ %; г) $P = 10$ ГВт, $\eta = 25$ %.

8.18

Чому дорівнює площа, розміри та ширина діаграми спрямованості антенної решітки в передавальній системі сонячної енергетичної станції при заданому коефіцієнті підсилення антени?

Вказівка: скористатися наступним виразом для коефіцієнта посилення антени: $G = 4\pi S\eta / \lambda^2 = 4\pi\eta / (\Delta\alpha)^2$, де η – ККД антени, S – ефективна площа антени, λ – довжина радіохвилі, $\Delta\alpha$ – ширина діаграми спрямованості антени.

- а) $G = 10^8$, $\eta = 80$ %, $\lambda = 10$ см; б) $G = 10^9$, $\eta = 60$ %, $\lambda = 8$ см;
 в) $G = 3 \cdot 10^8$, $\eta = 50$ %, $\lambda = 10$ см; г) $G = 5 \cdot 10^8$, $\eta = 75$ %, $\lambda = 9$ см.

8.19

Чому дорівнює площа та розміри наземної приймальної решітки в сонячній енергетичній станції при заданій ширині діаграми спрямованості передавальної антенної решітки? Станція перебуває на геостаціонарній орбіті. Коефіцієнт запасу за площею приймальної антени дорівнює 1.44.

а) $\Delta\alpha = 10^{-4}$; б) $\Delta\alpha = 2 \cdot 10^{-4}$; в) $\Delta\alpha = 5 \cdot 10^{-4}$; г) $\Delta\alpha = 10^{-5}$.

8.20

Обчислити відносні втрати потужності сонячної енергетичної станції за рахунок розвитку самофокусувальної нестійкості при заданій дисперсії фазових флуктуацій у фронті хвилі після проходження іоносфери.

а) $\sigma^2 = 0.1$; б) $\sigma^2 = 1$; в) $\sigma^2 = 2$; г) $\sigma^2 = 4$.



Розділ 9. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОЇ СТАТИСТИЧНОЇ РАДІОФІЗИКИ

9.1. Основні поняття та співвідношення

У задачах цього розділу одночасно присутні дві труднощі – *нелінійність* і *стохастичність* процесів. Такі процеси описуються нелінійними стохастичними диференціальними рівняннями (СДР). Для їх розв’язання розроблено низку методів.

Метод усереднення точного розв’язку СДР застосовується тоді, коли вдається аналітично розв’язати вихідне СДР. Далі обчислюються необхідні моменти для розв’язання $x(t)$. Особливо просто виглядає справа для лінійних рівнянь виду:

$$\hat{L}x(t) = \xi(t), \quad (9.1)$$

де $\hat{L}$ – лінійний оператор, $\xi(t)$ – заданий випадковий процес. Якщо існує обернений оператор $\hat{L}_1 = \hat{L}^{-1}$, то $x(t) = \hat{L}_1 \xi(t)$, а значить

$$\begin{aligned} \overline{x(t)} &= \hat{L}_1 \overline{\xi(t)}, \\ R_x(t_1, t_2) &= \overline{x(t_1)x(t_2)} = \hat{L}_1(t_1) \hat{L}_2(t_2) R_\xi(t_1, t_2), \end{aligned}$$

де R_x і R_ξ – відповідні коваріаційні функції.

При розв’язанні нелінійних СДР виду:

$$\hat{L}x = f(x) + \xi(t), \quad (9.2)$$

доцільно використовувати такі наближені методи.

Методи лінеаризації зводяться до розкладання $f(x)$ у ряди типу:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \\ f(x) &\approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}), \end{aligned}$$

тобто лінеаризації (9.2), після чого СДР розв'язується так само, як (9.1).

Метод статистичної лінеаризації передбачає заміну парної функції $f(x)$ на α , а непарної $f(x)$ – на βx . Константи α і β знаходяться з додаткових умов. Часто, наприклад, можна вимагати мінімізації функціоналів:

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \overline{(\alpha - f(x))^2}, \\ J(\beta) &= \overline{(\beta x - f(x))^2}, \end{aligned}$$

звідки

$$\alpha = \overline{f(x)}, \quad \beta = \frac{\overline{x f(x)}}{\overline{x^2}}.$$

При цьому для обчислення $\overline{f(x)}$, $\overline{x^2}$ і $\overline{x f(x)}$ задаються законом розподілу густини ймовірності процесу $x(t)$.

Метод рівняння Дайсона для середніх значень є корисним при розв'язанні рівнянь типу:

$$\hat{L}x = \hat{N}(x, \xi) + f(t), \quad (9.3)$$

де $\xi(t)$, $f(t)$ – випадкові процеси, $\hat{N}$ – нелінійний оператор. Спочатку з (9.3) одержують рівняння для $\tilde{x} = x - \bar{x}$. Воно має вигляд:

$$\hat{L}\tilde{x} = \hat{N} - \bar{\hat{N}} + f - \bar{f}. \quad (9.4)$$

Оператор $\hat{N}$ лінеаризують за $\tilde{x}$ і $\tilde{\xi} = \xi - \bar{\xi}$ і приходять до такого виразу

$$\hat{N}(x, \xi) \approx \hat{N}(\bar{x}, \bar{\xi}) + \left(\frac{\partial \hat{N}}{\partial x} \right)_{\bar{x}, \bar{\xi}} \tilde{x} + \left(\frac{\partial \hat{N}}{\partial \xi} \right)_{\bar{x}, \bar{\xi}} \tilde{\xi},$$

звідки $\bar{\hat{N}}(x, \xi) \approx \hat{N}(\bar{x}, \bar{\xi})$. При цьому

$$\begin{aligned} \hat{N}(x, \xi) - \bar{\hat{N}}(x, \xi) &\approx \left(\frac{\partial \hat{N}}{\partial x} \right)_{\bar{x}, \bar{\xi}} \tilde{x} + \left(\frac{\partial \hat{N}}{\partial \xi} \right)_{\bar{x}, \bar{\xi}} \tilde{\xi} \equiv \beta \tilde{x} + \gamma \tilde{\xi}, \\ \beta &= \left(\frac{\partial \hat{N}}{\partial x} \right)_{\bar{x}, \bar{\xi}}; \quad \gamma = \left(\frac{\partial \hat{N}}{\partial \xi} \right)_{\bar{x}, \bar{\xi}}; \end{aligned}$$

а співвідношення (9.4) зводиться до такого

$$\hat{L}\tilde{x} \approx \beta \tilde{x} + \gamma \tilde{\xi} + \tilde{f}, \quad \tilde{f} = f - \bar{f}.$$

Звідси розв'язок для $\tilde{x}$ у першому наближенні набуває вигляду:

$$\tilde{x} \approx \tilde{x}^{(1)} = \hat{L}_1(\gamma \bar{\xi} + \tilde{f}) \equiv F_1(\bar{x}, \bar{\xi}, \tilde{f}).$$

Знаючи $\tilde{x}^{(1)}$, можна обчислити:

$$\bar{\hat{N}} \approx \overline{\hat{N}(\tilde{x}^{(1)})} \equiv F_2(\bar{x}) + \bar{f}$$

та отримати рівняння Дайсона для $\bar{x}$

$$\hat{L}\bar{x} \approx F_2(\bar{x}) + \bar{f}.$$

9.2. Приклади

Приклад 1

Шляхом усереднення точного розв'язку нелінійної задачі обчислити $\overline{A(t)}$, $\overline{A^2(t)}$ і $\sigma_A^2(t)$ процесу, що описується виразом:

$$A(t) = A_0 e^{-|\xi|}, \quad \xi = x - ut.$$

Задано наступні моменти випадкового процесу $A_0(t)$: $\overline{A_0}$ и σ_0^2 .

Розв'язання

За визначенням

$$\begin{aligned}\overline{A(t)} &= \overline{A_0 e^{-|\xi|}} = \overline{A_0} e^{-|\xi|}, \\ \overline{A^2(t)} &= \overline{(A_0 e^{-|\xi|})^2} = \overline{A_0^2} e^{-2|\xi|}, \\ \sigma_A^2(t) &= \overline{A^2(t)} - \overline{A(t)}^2.\end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned}\overline{A(t)} &= \overline{A_0} e^{-|\xi|}, \\ \overline{A^2(t)} &= \left(\sigma_0^2 + \overline{A_0^2} \right) e^{-2|\xi|}, \\ \sigma_A^2(t) &= \sigma_0^2 e^{-2|\xi|}.\end{aligned}$$

Приклад 2

Вважаючи, що $|x| \ll 1$, та використовуючи метод лінеаризації, розв'язати стохастичне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{sh} x + \xi(t), \quad x(0) = 0.$$

де $\xi(t)$ – заданий випадковий процес. Обчислити $\overline{x(t)}$, якщо $\xi(t) = 0$.

Розв'язання

При $|x| \ll 1$ функція $\operatorname{sh} x \approx x$. Тоді

$$\frac{dx}{dt} - x = \xi(t), \quad x(0) = 0. \quad (9.5)$$

Розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$\frac{dx_0}{dt} - x_0 = 0$$

має вигляд:

$$x_0(t) = Ce^t. \quad (9.6)$$

Тоді розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо методом варіації довільної сталої, вважаючи $C = C(t)$. Підставимо (9.6) до (9.3) і отримаємо

$$\frac{dC}{dt}e^t = \xi(t),$$

звідки

$$C(t) = \int_t \xi(t')e^{-t'}dt'.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (9.5) має вигляд

$$x(t) = e^t \int_{t_0}^t \xi(t')e^{-t'}dt'.$$

З початкової умови випливає, що $t_0 = 0$. Тоді

$$x(t) = e^t \int_0^t \xi(t')e^{-t'}dt',$$

$$\overline{x(t)} = e^t \int_0^t \overline{\xi(t')}e^{-t'}dt' = 0.$$

Приклад 3

Використовуючи метод статистичної лінеаризації, розв'язати стохастичне диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{sh} x + \xi(t), \quad x(0) = 0,$$

де $\xi(t)$ – заданий випадковий процес. Закон розподілу x – нормальний з $\bar{x} = 0$ і дисперсією σ_x^2 .

Розв'язання

Оскільки функція $f(x) = \operatorname{sh}(x)$ – непарна, то замінімо $f(x)$ на βx і вимагатимемо

$$\overline{(f(x) - \beta x)^2} = \min,$$

звідки

$$\beta = \frac{\overline{xf(x)}}{\overline{x^2}}.$$

Маючи $\overline{x^2} = \sigma_x^2$, оскільки $\bar{x} = 0$, залишається обчислити

$$\overline{xf(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^{+\infty} x \operatorname{sh} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} dx = \sigma_x^2 e^{\frac{\sigma_x^2}{2}}.$$

Тоді $\beta = e^{\frac{1}{2}\sigma_x^2}$. Далі розв'язуємо вже лінеаризоване рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \beta x + \xi(t).$$

Оскільки розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$x_0(t) = Ce^{\beta t},$$

то розв'язок неоднорідного рівняння є наступним:

$$x(t) = e^{\beta t} \int_{t_0}^t \xi(t') e^{-\beta t'} dt'.$$

З урахуванням початкової умови $t_0 = 0$ отримуємо

$$x(t) = e^{\beta t} \int_0^t \xi(t') e^{-\beta t'} dt',$$

$$\text{де } \beta = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_x^2\right).$$

Приклад 4

Отримати рівняння Дайсона для стохастичного диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = x\xi, \quad x(0) = 1,$$

де $\xi(t)$ – випадковий процес з $\bar{\xi} = 0$, $R_\xi(t, t') = \sigma_\xi^2 \delta(t - t')$.

Розв’язання

Після усереднення вихідного рівняння маємо:

$$\overline{\frac{dx}{dt}} = \overline{x\xi}.$$

Тоді для $\tilde{x} = x - \bar{x}$ отримуємо:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = x\xi - \overline{x\xi}.$$

Лінеаризуємо нелінійний функціонал $x\xi$:

$$x\xi = (\bar{x} + \tilde{x})(\bar{\xi} + \tilde{\xi}) \approx \bar{x} \tilde{\xi}.$$

При цьому $\overline{x\xi} \approx \overline{\bar{x} \tilde{\xi}} = \bar{x} \bar{\tilde{\xi}} = 0$. Звідси

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \bar{x} \tilde{\xi}. \quad (9.7)$$

Розв’язок (9.7) має вигляд:

$$\tilde{x}(t) \equiv \tilde{x}^{(1)}(t) = \bar{x} \int_0^t \tilde{\xi}(t') dt' + C.$$

Оскільки $\overline{\tilde{x}(t)} = 0$, то $C = 0$. Тоді

$$\begin{aligned}\overline{x\xi} &\approx \overline{(\bar{x} + \tilde{x}^{(1)})\tilde{\xi}} = \overline{\bar{x}\tilde{\xi}} + \overline{\tilde{x}^{(1)}\tilde{\xi}} = \bar{x}\overline{\tilde{\xi}} + \overline{\tilde{x}^{(1)}\tilde{\xi}} = \\ &= \overline{\tilde{x}^{(1)}\tilde{\xi}} = \overline{\tilde{\xi}(t)\bar{x} \int_0^t \tilde{\xi}(t')dt'} = \bar{x} \int_0^t \overline{\tilde{\xi}(t) - \tilde{\xi}(t')}dt' = \\ &= \bar{x} \int_0^t R_\xi(t, t')dt' = \bar{x}\alpha\sigma_\xi^2 \int_0^t \delta(t - t')dt'.\end{aligned}$$

Оскільки $0 \leq t' \leq t$, то

$$\int_0^t \delta(t - t')dt' = 1, \quad \overline{x\xi} = \alpha\bar{x}\sigma_\xi^2.$$

Отже, рівняння Дайсона має вигляд:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} \approx \alpha\bar{x}\sigma_\xi^2.$$

Його розв'язок дається виразом

$$\bar{x}(t) = C = \bar{x}(0)\exp(\alpha\sigma_\xi^2 t)$$

Остаточно для $x(t) \approx \bar{x} + \tilde{x}^{(1)}(t)$ отримуємо

$$x(t) \approx \bar{x}(0)\exp(\alpha\sigma_\xi^2 t) + \tilde{x}^{(1)}(t) = \bar{x}(0)\exp(\alpha\sigma_\xi^2 t) + \bar{x} \int_0^t \tilde{\xi}(t')dt'.$$

9.3. Задачі для самостійного розв'язання

9.1

Шляхом усереднення точного розв'язку нелінійної задачі обчислити $\overline{A(t)}$, $\overline{A^2(t)}$, $\sigma_A^2(t)$ для процесу, що описується виразом:

- а) $A(t) = A_0 e^{\lambda t}$, б) $A(t) = A_0 \operatorname{ch}^{-1} \xi$, $\xi = x - ut$,
в) $A(t) = A_0 \operatorname{ch}^{-2} \xi$, $\xi = x - ut$, з) $A(t) = A_0 e^{-\xi^2}$, $\xi = x - ut$.

Задано такі моменти випадкового процесу $A_0(t)$: $\overline{A_0}$ і дисперсія σ_0^2 .

9.2

Вважаючи, що $|x| \ll 1$, та використовуючи метод лінеаризації, розв'язати стохастичне диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \xi(t), \quad x(0)=0,$$

де $\xi(t)$ – заданий випадковий процес, для випадків:

$$\begin{aligned} \text{а) } f(x) &= e^{-x}, & \text{б) } f(x) &= \sin x, \\ \text{в) } f(x) &= (1+x)^2, & \text{г) } f(x) &= \left(1 - \frac{x}{3}\right)^3. \end{aligned}$$

Обчислити $\overline{x(t)}$, вважаючи $\overline{\xi(t)} = 0$.

9.3

Використовуючи метод статистичної лінеаризації, розв'язати стохастичне диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \xi(t), \quad x(0) = 0,$$

де $\xi(t)$ – заданий випадковий процес. Прийняти, що:

$$\begin{aligned} \text{а) } f(x) &= \sin x, & \text{б) } f(x) &= x^3, \\ \text{в) } f(x) &= 1 + x^2, & \text{г) } f(x) &= \cos x. \end{aligned}$$

Закон розподілу x – нормальний з $\bar{x} = 0$ і дисперсією σ_x^2 .

9.4

Отримати рівняння Дайсона для стохастичного диференціального рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \xi(t), \quad x(0) = 0,$$

де $\xi(t)$ – заданий випадковий процес. Прийняти, що:

$$\begin{aligned} \text{а) } f(x) &= \cos x, & \text{б) } f(x) &= \sin x, \\ \text{в) } f(x) &= x^3, & \text{г) } f(x) &= 1 + x^2. \end{aligned}$$



Розділ 10. ДЕТЕРМІНОВАНИЙ ХАОС І САМООРГАНІЗАЦІЯ

10.1. Основні поняття та співвідношення

Хаос може виникати в дуже простих детермінованих системах, але обов'язково *нелінійних* і *динамічних*. Він отримав назву *детермінованого* чи *динамічного* хаосу. Такий хаос відрізняється від випадкового процесу. У динамічному хаосі є *гармонія*, вдається передбачити тип можливої структури. Геометричним образом хаосу є *дивні атрактори* – нестійкі траєкторії у фазовому просторі. Переріз дивних атракторів являє собою хаотичні фігури, що є прикладами фракталів.

Фракталом називається об'єкт, що має властивість самоподібності та дробову розмірність. На відміну від цілочисленної (або *топологічної*) розмірності d_T дробову розмірність d_H називають *хаусдорфовою*. Її можна обчислити за формулою:

$$d_H = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(N(r_n))}{\ln(1/r_n)}, \quad (10.1)$$

де r_n – сторона d_T -вимірного “кубика”, зануреного до d_T -вимірного простору, $N(r_n)$ – кількість “кубиків” в одиничному об'ємі.

Динамічний хаос і *самоорганізація* – дві реалізації одного й того процесу. Порядок та хаос еквівалентні стійкості та нестійкості системи.

Стійкість динамічних систем зручно досліджувати, переходячи від диференціального рівняння до *точкових відображень*. Траєкторії у фазовому просторі породжують на січній гіперплощині точкові відображення, які є законом відповідності між попередньою і наступними точками перетину. Кожна насту-

пна точка x_{n+1} виходить шляхом застосування до попередньої точки x_n , деякого перетворення виду

$$x_{n+1} = f(x_n, \lambda), \quad (10.2)$$

де λ – параметр. Так звані нерухомі точки x^* знаходяться із рівняння:

$$x^* = f(x^*). \quad (10.3)$$

Якщо $x_1 = x^*$, то для всіх $n > 1$ маємо $x_n = x^*$.

До відображень також належать перетворення наступного виду:

$$y = \underbrace{f(f \dots (x))}_{n \text{ раз}} \equiv f^{[n]}(x). \quad (10.4)$$

Раціональним x_n , множина яких зліченна, відповідають стійкі та повторювані траєкторії, тобто порядок, а ірраціональним – нестійкі траєкторії, тобто хаос.

Самоорганізація є результатом *врівноваження* хаотичних і колективних ефектів.

Автохвилі – один із прикладів самоорганізації. Автохвилями називають хвилі, що поширюються у відкритих системах (активних середовищах) без загасання.

Явище самоорганізації пов'язане з “забуттям” початкових умов. Наприклад, рівняння теплопровідності (дифузії), що традиційно описує дисипативний процес, тобто зникнення порядку, допускає розв’язок у вигляді стаціонарних хвиль (автохвиль).

При цьому рівняння має бути нелінійним та з джерелом такого типу:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = F(T) + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (10.5)$$

Рівняння (10.5) допускає розв’язок, що описує стаціонарні хвилі $T = f(x - ut)$, амплітуда яких наближається до постійного значення. Воно впливає із співвідношення $F(T_\infty) = 0$. Швидкість руху фронту хвилі при $t \rightarrow \infty$ наближається до величини

$$v_0 = 2\sqrt{\kappa F'(T_0)}.$$

Тут $\kappa(T) = \kappa(T_0)$, T_0 – незбурене значення T .

Іншими прикладами самоорганізації є ступінчастий профіль рівня води на гірських річках, *комірки Бенара*, *кільця Сатурна*, *явище морфогенезу* в біології та багато інших упорядкованих структур.

10.2. Приклади

Приклад 1

Для відображення $x_{n+1} = 1 - 2|x_n|$ показати:

- а) існування циклу з періодом 2 при $x_1 = 0,1$;
- б) існування граничних циклів при $x_1 = 0,5$ і $x_1 = 1/3$;
- в) появу хаосу при $x_1 = e$.

Розв'язання

При $x_1=0,1$ маємо $x_2=0,8$, $x_3=-0,6$, $x_4=-0,2$, $x_5=0,6$, $x_6=-0,2$, $x_7=0,6...$ Таким чином, період дорівнює 2.

При $x_1=0,5$ отримуємо $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=-1$, $x_5=-1$, $x_6=-1...$ Отже для цього значення x_1 при $n=4$ настає граничний цикл, коли $x_{n+1}=x_n$.

Аналогічно при $x_1=1/3$, $x_2=1/3$, ..., $x_n=1/3...$ цикл є граничним.

При ірраціональному значенні $x_1=e$, $x_2=1-2e$, $x_3=1-2|1-2e|=3-4e$, $x_4=1-2|3-4e|=7-8e$, $x_5=1-2|7-8e|$..., $x_n=2^{n-1}-1+2^{n+1}e...$, всі x_n для будь-якого n є ірраціональними. Це означає, що режим динамічної системи є хаотичним.

Приклад 2

Для відображення $x_{n+1} = 1 - 2|x_n|$ обчислити нерухомі точки.

Розв'язання

Нерухомі точки обчислюють з умови

$$x^* = 1 - 2|x^*|.$$

Звідси маємо

$$x^* = 1 - 2x^*, \quad x_1^* = \frac{1}{3},$$

або

$$x^* = 1 + 2x^*, \quad x_1^* = -1,$$

Приклад 3

Для нелінійного рівняння дифузії виду

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \gamma N^3 - \alpha N^2 + D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}; \quad \gamma, \alpha = \text{const.}$$

обчислити швидкість руху фронту хвилі при $t \rightarrow \infty$, знайти амплітуду стаціонарного розв'язку.

Розв'язання

Амплітуда стаціонарного розв'язку відшукується з умови:

$$F(N) = \gamma N_\infty^3 - \alpha N_\infty^2 = 0;$$

звідси нетривіальний розв'язок має вигляд

$$N_\infty = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Швидкість руху фронту хвилі

$$v_0 \Big|_{t \rightarrow \infty} = 2\sqrt{DF'(N_0)},$$

де

$$F'(N_0) = 3\gamma N_0^2 - 2\alpha N_0.$$

Тоді швидкість фронту

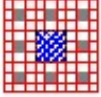
$$v_0 \Big|_{t \rightarrow \infty} = 2\sqrt{(3\gamma N_0 - 2\alpha)N_0 D}.$$

Приклад 4

Обчислити хаусдорфову та топологічну розмірності "килима" Серпинського, який утворюється послідовним поділом одиничного квадрата на 9 рівних частин і викиданням центральної.

Розв'язання

Розглянемо алгоритм побудови вказаного об'єкта:

№ кроку	Кількість квадратів, що залишилися	Довжина сторони одного квадрата	Площа одного квадрата
0 	$N=8^0$	$r_0=1$	$S_0=1$
1 	$N=8^1$	$r_1=\frac{1}{3}$	$S_1=\frac{1}{3^2}$
2 	$N=8^2$	$r_2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$S_2=\frac{1}{3^4}$
...	...	...	...
N	$N=8^n$	$r_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$S_n=\frac{1}{3^{2n}}$

Хаусдорфова розмірність "килима" Серпинського дорівнює

$$d_H = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(r_n)}{\ln r_n^{-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 8^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 8}{\ln 3}; \quad 1 < d_H < 2.$$

Площа викинутих квадратів складає

$$\begin{aligned} S &= S_1 + 8S_2 + 8^2S_3 + \dots + 8^{n-1}S_n = \\ &= \frac{1}{9} \left(1 + \frac{8}{9} + \dots + \frac{8^{n-1}}{9^{n-1}} \right) = \frac{1}{9} \frac{1}{1 - \frac{8}{9}} = 1. \end{aligned}$$

Площа фігури, що залишилася, дорівнює $S_{\text{ост}} = 1 - S = 0$, а значить, топологічна розмірність "килима" Серпинського $d_T = 1$.

10.3. Задачі для самостійного розв'язання

10.1

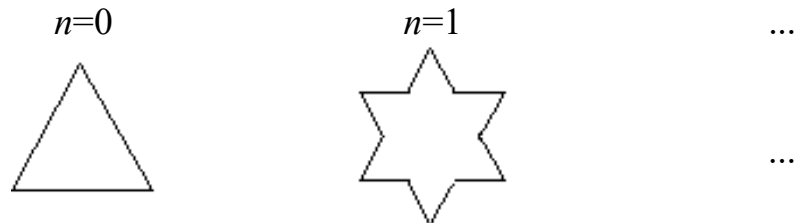
Обчислити хаусдорфову розмірність множини, утвореної послідовним поділом одиничного відрізка на m рівних частин та викиданням двох частин

- а) другої та третьої, $m=4$;
- б) другої та четвертої, $m=4$;
- в) першої та третьої, $m=4$;
- г) другої та четвертої, $m=5$.

10.2

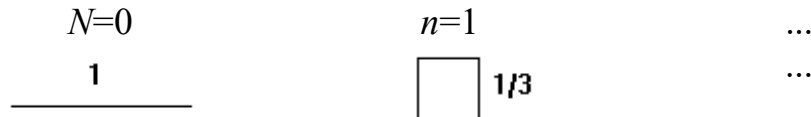
Обчислити хаусдорфову розмірність

- а) трикутника Коха:



б) квадрата Коха (множини, побудованого аналогічно трикутнику Коха, але на основі одиничного квадрата);

- в) наступної множини:



- г) квадрата, побудованого за принципом множини в);

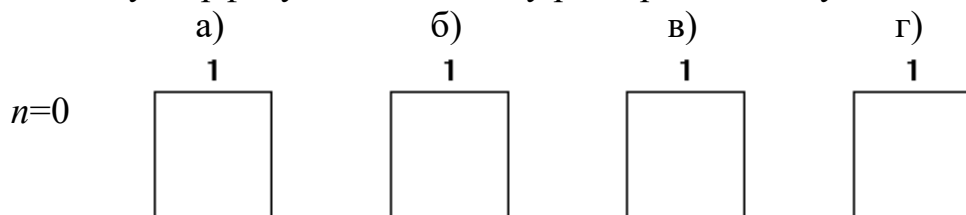
д) множини, аналогічного в), але при цьому відрізок ділиться не на 3, а на m частин.

10.3

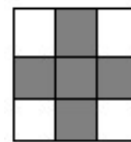
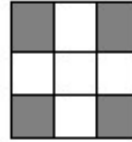
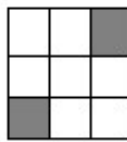
Обчислити хаусдорфову розмірність множини, утвореної послідовним поділом одиничного відрізка на m рівних частин та викиданням k частин.

10.4

Обчислити хаусдорфову та топологічну розмірності наступних множин:



$n=1$



...

...

...

...

...

10.5

Обчислити хаусдорфову та топологічну розмірності "дірявого" куба (куба Чорногора), утвореного викиданням середнього кубика після поділу сторін куба на три рівні частини.

10.6

Узагальнити результат задачі 10.5 на випадок m -вимірного куба з поділом сторін на k рівних частин.

10.7

Для відображення $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$ знайти нерухомі точки та з'ясувати стійкість траєкторій при:

а) $\lambda = 0,5$, б) $\lambda = 1$, в) $\lambda = 2$, г) $\lambda = 4$.

10.8

Для відображення $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$ з'ясувати стійкість траєкторій при $0 \leq \lambda < \infty$.

10.9

Для нелінійного рівняння теплопровідності виду

$$\frac{\partial T}{\partial t} = F(T) + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \kappa = \text{const.}$$

знайти амплітуду стаціонарного розв'язку та швидкість руху фронту хвилі. Прийняти

$$\begin{aligned} \text{а) } F(T) &= \alpha T - \beta T^2, & \text{б) } F(T) &= \alpha T^2 - \beta T, \\ \text{в) } F(T) &= \alpha T^3 - \beta T, & \text{г) } F(T) &= \alpha T^4 - \beta T^2. \end{aligned}$$



Література

1. Основна

1. Freegarde T. Introduction to the Physics of Waves. Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, Sao Paulo, Delhi. Mexico City: Cambridge University Press, 2013. – 296 p.
2. Lui Lam, ed. Introduction to Nonlinear Physics. Textbook. Springer, 1997. – 368 p.
3. Pain H. J., Rankin P. Introduction to Vibrations and Waves. John Wiley & Sons, Ltd., 2015. – 369 p.
4. Черногор Л. Ф. Нелинейная радиофизика. Издание третье, дополненное и переработанное. – Харьков: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2016. – 208 с.
5. Черногор Л. Ф. Нелінійна радіофізика. Харків, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 2016. 204 с.

2. Додаткова

6. Arrowsmith D. K., Place C. M. Dynamical systems. Chapman & Hall, 1992. – 170p.
7. Afraimovich V., Hsu S.-B. Lectures on chaotic dynamical systems. AMS, 2003. – 182p.
8. Pierce J.R. Almost all about waves. MIT, 1974 –222 p._
9. Sagdeev R. Z., Galeev A. A. Nonlinear Plasma Theory. – N. Y. – L.: Benjamin, 1969. – 295 p.
10. Aubry S. Solitons and condensed matter physics/Eds. A. R. Bishop and T. Schneider.—Springer, 1978. – 264 p.
11. Bayin S. Mathematical Methods in Science and Engineering. New Jersey: Wiley-Interscience, 2006. – 679 p.

12. Bloembergen N. Nonlinear Optics. A Lecture Note. New-York – Amsterdam, W. A. Benjamin, Inc., 1965. – 476 p.
13. Nishikawa K., Wakatani M. Plasma Physics. Basic Theory with Fusion Applications. Springer, 2000. – 353 p.
14. Walker A.D.M. Plasma Waves in the Magnetosphere. Springer, 1993. – 355 p.
15. Mueller I., Weiss W. Entropy and energy. A universal competition. Springer, 2005. – 286 p.
16. Davidson P.A., Thess A. (eds.) Magnetohydrodynamics. Lectures. Springer, 2002. – 158 p.
17. Debnath L. Nonlinear Water Waves. Academic Press, 1994. – 560 p.
18. Brin M., Stuck G. Introduction to dynamical systems. CUP, 2003. – 250 p.
19. Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. New York: W. H. Freeman and Company, 1982. 468 p
20. Crownover R. M. Introduction to Fractals and Chaos. Boston: Jones and Bartlett Publ., 1995. 299 p.
21. Glansdorff P., Prigogine I. Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations. Wiley, 1971. – 306 p.
22. Moon F. C. Chaotic and Fractal Dynamics. An Introduction for Applied Scientists and Engineers. Weinheim: Wiley-VCH Verlag, 2004. – 508 p.
23. Maimistov A.I., Basharov A.M. Nonlinear optical waves. Kluwer, 1999. – 658 p.
24. Mukamel S. Principles of nonlinear optical spectroscopy. Oxford, 1996. – 549 p.
25. Mandelbrot B. B. Fractals and Chaos. The Mandelbrot Sets and Beyond. New York: Springer-Verlag, 2004. – 308 p.
26. Peitgen H.-O., Jurgens H., and Saupe D. Chaos and Fractals. New Frontiers of Science. Second Edition. New York: Springer-Verlag, 2004. – 864 p.
27. Hartemann F. V. High-field electrodynamics. CRC Press, 2002. – 668 p.
28. Hale J. K., Kocak H. Dynamics and bifurcations. Springer, 1991. – 291 p.
29. Haken H. Laser light dynamics, vol. 2. N.-Y., Oxford, Tokyo: North-Holland Physics Publ., 1985. – 354 p.
30. Haller G. Chaos Near Resonance. Springer, 1999. – 446 p.
31. Kuznetsov Yu.A. Elements of applied bifurcation theory. Springer, 1998. – 614 p.
32. Lamb, G. L., jr. Elements of Soliton Theory. New York-Chichester-Brisbane-Toronto: John Wiley & Sons, 1980. – 302 p.
33. Hoppensteadt F. C. Analysis and simulations of chaotic systems. Springer, 2000.
34. Ott E. Chaos in dynamical systems. CUP, 1993. – 393 p.
35. Moon, F. C. Chaotic vibrations: an introduction for applied scientists and engineers. New York: Wiley, 1987. – 309 p.

36. Schroeder M. Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite. New York: W. H. Freeman and Company, 1991. – 429 p.
37. Leibovich S., Seebass A. R., eds. Nonlinear Waves. Cornell University Press, 1974. – 331 p.
38. Nicolis G., Prigogine, I. Self-Organization in Nonequilibrium Systems. Wiley-Interscience, New York, 1977. – 491 p.
39. Ramm A. G., Hoang N. S. Dynamical Systems Method and Applications. Theoretical Developments and Numerical Examples. Wiley, 2011. – 572 p.
40. Flake G. W. The Computational Beauty of Nature: Computer Explorations of Fractals, Chaos, Complex Systems, and Adaptation. Cambridge, MA: MIT Press, 1998. – 493 p.
41. Feldman D. P. Chaos and Fractals. An Elementary Introduction. Oxford: Oxford University Press, 2012. – 408 p.
42. Gulick D. Encounters with Chaos and Fractals. College Park: University of Maryland, 2012. – 371 p.
43. Scheinerman E. R. Invitation to Dynamical Systems. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1995. – 373 p.
44. Gaponov-Grekhov A. V. and Rabinovich M. I. Nonlinearities in Action: Oscillations, Chaos, Order, Fractals. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1992. – 191 p.
45. Lesne A. Renormalization Methods: Critical Phenomena, Chaos, Fractal Structures. Chichester: John Wiley & Sons, 1998. – 374 p.
46. Bhatnagar P. L. Nonlinear waves in one-dimensional dispersive. Oxford: Clarendon Press, 1979. – 142 p.
47. Mullin T., ed. The nature of chaos, Oxford, 1993. – 170 p.
48. Scott A.C. Active and Nonlinear Wave Propagation in Electronics. New York: Wiley-Interscience, 1970. – 326 p.
49. Bullough R. K., Caudrey P. J., eds. Solitons. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1980. – 408 p.
50. Tabor M. Chaos and Integrability in nonlinear Dynamics: An Introduction. Wiley-Interscience, 1989. – 384 p.
51. Whitham G. B. Linear and Nonlinear Waves. Wiley-Interscience, 1974. – 636 p.
52. Feder J. Fractals. New York and London: Springer Science, 1988. – 305 p.
53. Zhidkov P. E. Korteweg-de Vries and nonlinear Schroedinger equation. Springer, 2001.
54. Haken H. Synergetics. Springer Series in Synergetics. Springer, 1983. – 372 p.
55. Черногор Л. Ф. Природознавство: Інтегруючий курс. – Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2008. – 524 с.
56. Черногор Л. Ф. Фізика Землі, атмосфери і геокосмоса в світє системної парадигми // Радіофізика і радіоастрономія. – 2003. – Т. 8, № 1. – С. 59 – 106.

57. Черногор Л. Ф. Цунами – глобальная природная катастрофа // *Universitates*, 2005, № 1, с. 22 – 35.
58. Яновский В. В. Лекции о нелинейных явлениях. Том 1. Харьков: Институт монокристаллов, 2006. – 456 с.
59. Черногор Л. Ф. Нелинейность как основа новой научной картины мира // *Universitates*, 2006, №4. С. 40 – 51.
60. Яновский В. В. Фракталы. Возникновение новой парадигмы в физике. *Universitates*. 2003. № 3. С. 32–47.
61. Mori H., Kuramoto Y., Paquette G. C. *Dissipative Structures and Chaos*. Springer, 1998. – 306 p.
62. Shen Y. R. *Principles of Nonlinear Optics*. New York: John Wiley & Sons, 1984. – 576 p.
63. Schubert M., Wilhelmi B. *Nonlinear Optics and Quantum Electronics*. – New York: Wiley, 1986. – 752 p.
64. Schuster H. G., Just W. *Deterministic Chaos: An Introduction*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2005. – 312 p.
65. Baker G. L., Gollub J. P. *Chaotic Dynamics*. Cambridge University Press, 1996. – 258 p.
66. Gurevich A. V. *Nonlinear Phenomena in the Ionosphere*. N.-Y.: Springer-Verlag, 1978. – 372 p.



ДОДАТОК

1. Визначення гіперболічних функцій.

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\operatorname{cth} x}.$$

2. Формули Ейлера для комплексних чисел

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z; \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z;$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

3. Ряди Тейлора та Мак-Лорена.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

4. Розкладання деяких функцій у степеневі ряди

$$(1 \pm x)^m = 1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\dots + (\pm 1)^n \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad m > 0, \quad |x| < 1;$$

$$(1 \pm x)^{-m} = 1 \mp mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\dots + (\pm 1)^n \frac{m(m+1)\dots(m+n-1)}{n!}x^n + \dots, \quad m > 0, \quad |x| < 1;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in R;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in R;$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in R;$$

$$a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \dots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + \dots, \quad x \in R;$$

$$\ln x = 2 \left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \dots + \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}} + \dots \right),$$

$$x > 0;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad -1 < x \leq 1;$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots, \quad -1 \leq x < 1;$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in R;$$

$$\operatorname{ch} x = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in R;$$

5. Деякі інтеграли, що найчастіше зустрічаються при розв'язанні задач.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C, \quad a \neq 0;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a - x}{a + x} \right| + C, \quad a \neq 0;$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C;$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad |x| < a, \quad a \neq 0;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{a^2 + x^2} \right| + C, \quad a \neq 0;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C, \quad |x| > |a|, \quad a \neq 0;$$

$$\int \sin^2 mx dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4m} \sin 2mx + C;$$

$$\int \cos^2 mx dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4m} \sin 2mx + C;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi};$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2} x^n dx = \frac{1}{2a^{n+1}} \Gamma \left(\frac{n+1}{2} \right), \quad a > 0, \quad n > -1;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 \pm px} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{p^2}{4a}}, \quad a > 0;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos mx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\frac{m^2}{4a}}, \quad a > 0;$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos mx dx = \frac{a}{a^2 + m^2}, \quad a > 0;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0), \text{ де } f(x) \text{ безперервна в } x_0.$$

6. Деякі фізичні константи.

1. Швидкість світла у вакуумі $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с;
2. Елементарний заряд $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл;
3. Маса спокою електрона $m \approx 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг;
4. Стала Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К;
5. Електрична стала $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.



ВІДПОВІДІ

2.1

$$a) v_\phi = \frac{c}{(1 + \alpha E)}; E(x, t) = E_0 \cos k_0 \left(x - \frac{ct}{(1 + \alpha E)} \right);$$

$$H(x, t) = \pm \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left((1 + \alpha E)^2 - 1 \right) = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left(1 + \frac{1}{\alpha} E \right) E.$$

$$b) v_\phi = \frac{c}{1 + \alpha E^2}; E(x, t) = E_0 \cos k_0 \left(x - \frac{ct}{1 + \alpha E^2} \right);$$

$$H(x, t) = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left(E + \frac{\alpha}{3} E^3 \right).$$

$$b) v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 + 3\alpha E^2}}; E(x, t) = E_0 \cos k_0 \left(x - \frac{ct}{\sqrt{1 + 3\alpha E^2}} \right);$$

$$H(x, t) = \begin{cases} \alpha \geq 0; \pm \left(\frac{E}{2} \sqrt{1 + 3\alpha E^2} + \frac{1}{2\sqrt{3\alpha}} \ln \left(\sqrt{3\alpha} E + \sqrt{1 + 3\alpha E^2} \right) \right); \\ \alpha < 0; \pm \frac{1}{2\sqrt{3|\alpha|}} \left(\arcsin \sqrt{3|\alpha|} E + \sqrt{3|\alpha|} E \sqrt{1 - 3|\alpha| E^2} \right). \end{cases}$$

$$c) v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0(1 + \alpha E)}}; E(x, t) = E_0 \cos k_0 \left(x - \frac{ct}{\sqrt{\varepsilon_0(1 + \alpha E)}} \right);$$

$$H(x, t) = \pm \frac{2}{3\alpha} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left(\pm (1 + \alpha E)^{3/2} - 1 \right).$$

2.2

$$a) Ae^{aA} = A_0 e^{aA_0} e^{-k_0}, \text{ при } k_0 \gg 1 \quad A \approx A_0 e^{aA_0} e^{-k_0}; P \approx e^{aA_0};$$

$$a1) a > 0, P > 1; a = A_0^{-1}, P \approx 2,78;$$

$$a2) a < 0, P < 1; a = -A_0^{-1}, P \approx 0,38;$$

$$a3) a = 0, P = 1.$$

$$a4) a = A_0^{-1}, A(x) \approx A_0 e^{-\alpha_0 x + 1};$$

$$a5) a = -A_0^{-1}, A(x) \approx A_0 e^{-\alpha_0 x - 1};$$

$$б) A = \frac{A_0 e^{-k_0}}{1 + aA_0(1 - e^{-k_0})}, \text{ при } k_0 \gg 1 \quad A \approx \frac{Ae^{-k_0}}{1 + aA_0}; P \approx \frac{1}{1 + aA_0};$$

$$б1) a > 0, P < 1; a = A_0^{-1}, P = 0,5;$$

$$б2) a < 0, P > 1; a = -A_0^{-1}, P = e^{k_0} \gg 1;$$

$$б3) a = 0, P = 1;$$

$$б4) a = A_0^{-1}, A(x) \approx \frac{A_0 e^{-\alpha_0 x}}{2 + e^{-k_0}};$$

$$б5) a = -A_0^{-1}, A(x) \approx A_0;$$

$$в) Ae^{\frac{a}{3}A^3} = A_0 e^{\frac{a}{3}A_0^3} e^{-k_0}, \text{ при } k_0 \gg 1 \quad A \approx A_0 e^{-k_0} e^{\frac{a}{3}A_0^3}; \quad P \approx e^{\frac{a}{3}A_0^3};$$

$$в1) a > 0, P > 1; a = A_0^{-3}, \quad P \approx 1,4;$$

$$в2) a < 0, P < 1; a = -A_0^{-3}, \quad P \approx 0,7;$$

$$в3) a = 0, P = 1.$$

$$в4) a = A_0^{-3}, A(x) \approx A_0 e^{\alpha_0 x} e^{1/3};$$

$$в5) a = -A_0^{-3}, A(x) \approx A_0 e^{-\alpha_0 x} e^{-1/3};$$

$$г) Ae^{aA + \frac{b}{2}A^2} = A_0 e^{aA_0 + \frac{b}{2}A_0^2}; \text{ при } k_0 \gg 1$$

$$A \approx A_0 e^{aA_0 + \frac{b}{2}A_0^2} e^{-k_0}; P \approx e^{aA_0 + \frac{b}{2}A_0^2};$$

$$г1) a > 0, b \geq 0, P > 1; a = A_0^{-1}, \quad b = A_0^{-2}, \quad P \approx 4,6;$$

$$г2) a > 0, b < 0$$

$$г21) a > \frac{1}{2}|b|A_0, P > 1; a = A_0^{-1}, \quad b = A_0^{-2}, \quad P \approx 1,7;$$

- $\varepsilon 22) a = \frac{1}{2}|b|A_0, \quad P = 1;$
 $\varepsilon 23) a < \frac{1}{2}|b|A_0, \quad P < 1;$
 $\varepsilon 3) a=0, b>0, P>1.$
 $\varepsilon 4) a=0, b=0, P=1.$
 $\varepsilon 5) a=0, b<0, P<1.$
 $\varepsilon 6) a<0, b>0$
 $\varepsilon 61) |a| < \frac{1}{2}bA_0, \quad P > 1;$
 $\varepsilon 62) |a| = \frac{1}{2}bA_0, \quad P = 1;$
 $\varepsilon 63) |a| > \frac{1}{2}bA_0, \quad p < 1; \quad a = -A_0^{-1}, \quad b = A_0^{-2}, \quad P \approx 0,6;$
 $\varepsilon 7) a<0, b<0, P<1; \quad a = -A_0^{-1}, \quad b = A_0^{-2}, \quad P \approx 0,2.$
 $\varepsilon 8) a = A_0^{-1}, b = A_0^{-2}, A(x) \approx A_0 e^{-\alpha_0 x + \frac{3}{2}};$
 $\varepsilon 9) a = -A_0^{-1}, b = -A_0^{-2} \quad A(x) \approx A_0 e^{-\alpha_0 x - 3/2};$

2.3

- $a) P_{12} = e^{\frac{aA_{10}}{\alpha_{10}} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}}; \quad a1) a>0, P_{12}>1; a2) a<0, P_{12}<1; a3) a=0, P_{12}=1.$
 $\bar{o}) P_{12} = (1 + aA_{10})^{\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}}; \bar{o}1) a>0, P_{12}<1; \bar{o}2) a<0, P_{12}>1; \bar{o}3) a=0, P_{12}=1.$
 $\bar{e}) P_{12} = e^{\frac{a}{3} A_{10}^3 \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}}; \bar{e}1) a>0, P_{12}>1; \bar{e}2) a<0, P_{12}<1; \bar{e}3) a=0, P_{12}=1.$
 $\varepsilon) P_{12} = e^{\left(aA_{10} + \frac{b}{2}A_{10}^2 \right) \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}};$
 $a>0, b \geq 0, P_{12}>1;$
 $a>0, b<0; \quad a > \frac{1}{2}|b|A_{10}, \quad P_{12} > 1;$
 $a = \frac{1}{2}|b|A_{10}, \quad P_{12} = 1;$
 $a < \frac{1}{2}|b|A_{10}, \quad P_{12} < 1;$
 $a=0, b>0, P_{12}>1,$
 $a=0, b=0, P_{12}=1,$

$$a=0, b<0, P_{12}<1.$$

$$a<0, b>0:$$

$$|a| < \frac{1}{2}bA_{10}, \quad P_{12} > 1;$$

$$|a| = \frac{1}{2}bA_{10}, \quad P_{12} = 1;$$

$$|a| > \frac{1}{2}bA_{10}, \quad P_{12} < 1;$$

$$a<0, b<0, P_{12}<1.$$

2.4

$$a) \Delta\varphi_{\text{нл}}(x) \approx \frac{a_1\omega}{\alpha_0 c} \left[A_0(1 - e^{-\alpha_0 x} e^{a_2 A_0}) + \frac{a_2}{2} A_0^2(1 - e^{-2\alpha_0 x} e^{2a_2 A_0}); \right]$$

$$\Delta\varphi_{\text{нл}} \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{a_1\omega}{\alpha_0 c} \left(A_0 + \frac{a_2}{2} A_0^2 \right);$$

$$б) \Delta\varphi_{\text{нл}}(x) \approx \frac{\omega}{\alpha_0 c} \frac{a_1}{a_2} \ln \frac{1 + \frac{a_2 A_0 e^{-\alpha_0 x}}{1 + a_2 A_0}}{1 + a_2 A_0};$$

$$\Delta\varphi_{\text{нл}} \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow -\frac{\omega}{\alpha_0 c} \frac{a_1}{a_2} \ln(1 + a_2 A_0);$$

$$в) \Delta\varphi_{\text{нл}}(x) \approx \frac{a_1\omega}{\alpha_0 c} \left\{ \frac{A_0^2}{2} (1 - e^{-2\alpha_0 x + 2a_2 A_0}) + \frac{a_2}{3} A_0^3 (1 - e^{-3\alpha_0 x + 3a_2 A_0}) \right\}$$

$$\Delta\varphi_{\text{нл}} \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{a_1\omega}{\alpha_0 c} \left(\frac{A_0^2}{2} + \frac{a_2}{3} A_0^3 \right);$$

$$г) \Delta\varphi_{\text{нл}}(x) \approx \frac{a_1\omega}{\alpha_0 c} \left\{ \frac{A_0^2}{2} (1 - e^{-2\alpha_0 x} e^{a_2 A_0^2}) + \frac{a_2}{4} A_0^4 (1 - e^{-4\alpha_0 x} e^{2a_2 A_0^2}) \right\};$$

$$\Delta\varphi_{\text{нл}} \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{a_1\omega}{\alpha_0 c} \left(\frac{A_0^2}{2} + \frac{a_2}{4} A_0^4 \right);$$

2.5

$$a) \Delta\varphi_{\text{нл}} = \frac{\omega}{c} \frac{bL_{10}}{a} \ln \frac{1 + aA_0}{1 + aA}; \quad A = \frac{A_0 e^{-k_0}}{1 + aA_0(1 - e^{-k_0})};$$

$$\begin{aligned}
 \Delta\varphi_{HL} \Big|_{x \rightarrow \infty} &\rightarrow \frac{\omega}{c} \frac{bL_{10}}{a} \ln(1 + aA_0); \\
 \delta) \Delta\varphi_{HL} &= \frac{\omega}{c} bL_{10} \left(A_0 - A + \frac{a}{2} (A_0^2 - A^2) \right); \quad Ae^{aA} = A_0 e^{aA_0} e^{-k_0}; \\
 \Delta\varphi_{HL} \Big|_{x \rightarrow \infty} &\rightarrow \frac{\omega}{c} bL_{10} \left(A_0 + \frac{a}{2} A_0^2 \right); \\
 \epsilon) \Delta\varphi_{HL} &= \frac{\omega}{c} \frac{bL_{10}}{a} \left(A_0 - A - \frac{1}{a} \ln \frac{1 + aA_0}{1 + aA} \right); \quad A = \frac{A_0 e^{-k_0}}{1 + aA_0(1 - e^{-k_0})}; \\
 \Delta\varphi_{HL} \Big|_{x \rightarrow \infty} &\rightarrow \frac{\omega}{c} \frac{bL_{10}}{a} \left(A_0 - \frac{1}{a} \ln(1 + aA_0) \right); \\
 \zeta) \Delta\varphi_{HL} &= \frac{\omega}{c} bL_{10} \left(\frac{1}{2} (A_0^2 - A^2) + \frac{a}{3} (A_0^3 - A^3) \right); \quad Ae^{aA} = A_0 e^{aA_0} e^{-k_0}; \\
 \Delta\varphi_{HL} \Big|_{x \rightarrow \infty} &\rightarrow \frac{\omega}{c} bL_{10} \left(\frac{A_0^2}{2} + \frac{aA_0^3}{3} \right).
 \end{aligned}$$

3.1

$$\begin{aligned}
 a) \text{ i } \delta) \quad v(\xi) &= \frac{v_0}{1 + e^{\xi/\xi_0}}; \quad \xi_0 = \frac{2\nu}{v_0} \\
 \delta) \text{ i } \zeta) \quad v(\xi) &= v_0 \frac{1 - 0,5e^{\xi/\xi_0}}{1 + e^{\xi/\xi_0}}; \quad \xi_0 = \frac{4\nu}{v_0}.
 \end{aligned}$$

3.2

$$\begin{aligned}
 a) \text{ i } \delta) \quad v(\xi) &= \frac{2v_0}{\sqrt{1 + e^{2\xi/\xi_0}}}; \quad \xi_0 = \frac{\nu}{4\alpha v_0^2}; \\
 \delta) \text{ i } \zeta) \quad v(\xi) &= \frac{v_0}{\sqrt{1 + e^{2\xi/\xi_0}}}; \quad \xi_0 = \frac{\nu}{\alpha v_0^2}.
 \end{aligned}$$

3.3

$$u \sim v_0; \quad \xi_0 \sim \nu / v_0.$$

3.4

$$u \sim v_0; \quad T_0 \sim \nu / v_0, \quad L \sim v_0 / \alpha.$$

3.5

$$u \sim v_0; \quad \xi \sim \nu / v_0; \quad L \sim 1 / \gamma.$$

3.6

$$a) \text{ i } \vartheta) \quad v(\xi) = \frac{v_0}{1 + e^{\xi/\xi_0}}; \quad \xi_0 = \frac{2\nu}{v_0}$$

$$\delta) \text{ i } \varepsilon) \quad v(\xi) = v_0 \frac{1 - 0,5e^{\xi/\xi_0}}{1 + e^{\xi/\xi_0}}; \quad \xi_0 = \frac{\nu}{v_0}.$$

3.7

$$u \sim 3\alpha v_0^2; \quad \xi_0 \sim \frac{\nu}{3\alpha v_0^2}.$$

4.1

$$a) \quad v(\xi) = \frac{v_0}{ch \xi/\xi_0}; \quad \xi_0 = \sqrt{\frac{\beta}{u}}; \quad v_0 = \sqrt{\frac{u}{\alpha}};$$

$$\delta) \quad v(\xi) = \frac{v_0}{ch \xi/\xi_0}; \quad \xi_0 = \sqrt{\frac{\beta}{|u|}}; \quad v_0 = \sqrt{\frac{|u|}{\alpha}}.$$

4.2

$$v_0 \sim \sqrt{\frac{u}{6\alpha}}; \quad \xi_0 \sim \sqrt{\frac{\beta}{u}}.$$

4.3

$$v_0 \sim u; \quad \xi_0 \sim \sqrt{\frac{\beta}{u}}.$$

4.5

$$v(\xi) = \mp \frac{\sqrt{1+u^2}}{\xi}; \quad v'(\xi) = \pm \frac{\sqrt{1+u^2}}{\xi^2}.$$

4.6

$$v(x, t) = \sqrt{\frac{u_1(u_1 - 2u_2)}{2\beta}} \operatorname{ch}^{-1} \left(\sqrt{u_1(u_1 - 2u_2)} (x - u_1 t) \right) \cdot \exp \left(i \frac{u_1}{2} (x - u_2 t) \right).$$

4.7

$$v(\xi) = v(0) ch^{-1} \frac{\xi}{\xi_0}; v(0) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}; \xi_0 = \sqrt{\frac{D}{\beta}}.$$

4.8

- а) $v_m \sim \frac{\beta}{\alpha}, u \sim v_m, \xi_a \sim \frac{v}{v_m};$
 б) $v_m \sim \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, u \sim v_m, \xi_a \sim \frac{v}{v_m};$
 в) $v_m \sim \frac{\beta}{\alpha}, u \sim v_m, \xi_a \sim \frac{v}{v_m};$
 г) $v_m \sim \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, u \sim v_m, \xi_a \sim \frac{v}{v_m}.$

4.9

Вказівка. При обчисленні останнього інтеграла по v помножити чисельник і знаменник на v та позначити $w = v^2$.

4.10

- а) $v(\xi) = \frac{v(0)}{ch^2(\xi / \xi_0)}, v(0) = 3u, \xi_0 = 2\sqrt{\tilde{\beta} / u}, \tilde{\beta} = |\beta|u,$
 б) $v(\xi) = \frac{v(0)}{ch^2(\xi / \xi_0)}, v(0) = 3u, \xi_0 = 2\sqrt{\tilde{\beta} / u}, \tilde{\beta} = \beta u^2,$
 в) $v(\xi) = \frac{v(0)}{ch^2(\xi / \xi_0)}, v(0) = 3u, \xi_0 = 2\sqrt{\tilde{\beta} / u}, \tilde{\beta} = |\beta|u^3,$
 г) $v(x) = \frac{v(0)}{ch^2(x / x_0)}, v(0) = 3\tilde{u} = \frac{3}{u}, x_0 = 2\sqrt{\tilde{b} / \tilde{u}} = 2\sqrt{bu^3},$
 $\tilde{u} = \frac{1}{u}, \tilde{b} = bu^2,$

4.11

- а) $v(\xi) = \frac{v_m}{ch^2(\xi / \xi_0)}; v_m = 3\tilde{u} = \frac{3u^2}{\alpha}; \xi_0 = 2\sqrt{\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{u}}} = \frac{2}{u}\sqrt{\beta},$
 $\tilde{u} = \frac{u^2}{\alpha}, \tilde{\beta} = \frac{\beta}{\alpha};$
 б) $v(\xi) = \frac{v_m}{ch^2(\xi / \xi_0)}; v_m = 3\tilde{u} = \frac{3u}{\alpha}; \xi_0 = 2\sqrt{\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{u}}} = \frac{2}{u}\sqrt{|\beta|},$

$$\tilde{u} = \frac{u}{\alpha}, \tilde{\beta} = \frac{|\beta|}{\alpha u};$$

$$е) v(\xi) = \frac{v_m}{\text{ch}^2(\xi / \xi_0)}; v_m = 3\tilde{u} = \frac{3}{|\alpha|u^2}; \xi_0 = 2\sqrt{\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{u}}} = 2\sqrt{|\beta|},$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{|\alpha|u^2}, \tilde{\beta} = \frac{|\beta|}{|\alpha|u^2};$$

$$з) v(\xi) = \frac{v_m}{\text{ch}^2(\xi / \xi_0)}; v_m = 3\tilde{u} = \frac{3}{\alpha u}; \xi_0 = 2\sqrt{\frac{\beta}{u}}, \tilde{u} = \frac{1}{\alpha u}, \tilde{\beta} = \frac{\beta}{\alpha u^2};$$

4.12

$$а) v(\xi) = \frac{v_m}{\text{ch}^2(\xi / \xi_0)}; v_m = 3\tilde{u} = \frac{3u^2}{|\alpha|}; \xi_0 = 2\sqrt{\frac{|\beta|}{|u|}} = 2\sqrt{\frac{\beta}{u}},$$

$$\tilde{u} = \frac{u^2}{|\alpha|}, \tilde{\beta} = \frac{\beta u}{|\alpha|};$$

$$б) v(\xi) = \frac{v_m}{\text{ch}^2(\xi / \xi_0)}; v_m = 3\tilde{u} = \frac{3u^2}{|\alpha|}; \xi_0 = 2\sqrt{\frac{|\beta|}{|u|}} = 2\sqrt{|\beta|},$$

$$\tilde{u} = \frac{u^2}{|\alpha|}, \tilde{\beta} = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| u^2;$$

$$в) v(\xi) = \frac{v_m}{\text{ch}^2(\xi / \xi_0)}; v_m = 3\tilde{u} = \frac{3u^2}{|\alpha|}; \xi_0 = 2\sqrt{\frac{|\beta|}{|u|}} = 2\sqrt{\beta u},$$

$$\tilde{u} = \frac{u^2}{|\alpha|}, \tilde{\beta} = \beta \frac{u^3}{|\alpha|};$$

$$г) v(\xi) = \frac{v_m}{\text{ch}^2(\xi / \xi_0)}; v_m = 3\tilde{u} = \frac{3u^2}{|\alpha|}; \xi_0 = 2\sqrt{\frac{|\beta|}{|u|}} = 2u\sqrt{|\beta|},$$

$$\tilde{u} = \frac{u^2}{|\alpha|}, \tilde{\beta} = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| u^4.$$

4.13

а) не має,

б) має при

$$\xi = x + ut, u > 0, \alpha < 0, v(\xi) = \frac{v_m}{\text{ch}(\xi / \xi_0)}, v_m = \sqrt{\frac{6u}{|\alpha|}}, \xi_0 = \sqrt{\frac{|\beta|}{u}}.$$

4.14

$$a) \ v(\xi) = \frac{v(0)}{\text{ch}^2(\xi / \xi_0)}, \ v(0) = 3\tilde{u}, \ \xi_0 = 2\sqrt{\frac{\beta}{\tilde{u}}},$$

$$\tilde{u} = u - \alpha, \ \alpha < u, \ \xi = x - \tilde{u}t \text{ аёо } \xi = x - u\tilde{t}, \ \text{де } \tilde{t} = \left(1 - \frac{\alpha}{u}\right)t,$$

$$б) \ v(\xi) = \frac{v(0)}{\text{ch}^2(\xi / \xi_0)}, \ v(0) = 3\tilde{u}, \ \xi_0 = 2\sqrt{\frac{\beta}{\tilde{u}}},$$

$$\tilde{u} = u(1 + \alpha), \ \alpha \geq -1, \ \xi = x - \tilde{u}t \text{ аёо } \xi = x - u\tilde{t}, \ \text{де } \tilde{t} = (1 + \alpha)t.$$

5.1

$$a) \ A_1(t) = \frac{A_1(0)}{\text{ch}^2\gamma_2 \frac{A_0 A_1(0)}{A_{2\infty}} t}; \ A_2(t) = A_{2\infty} \text{th} \frac{A_0 A_1(0)}{A_{2\infty}} t;$$

$$A_{2\infty} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{2\gamma_2 A_1(0) A_0}};$$

$$б) \ A_1(t) = A_{1\infty} \text{th}\gamma_2 A_{1\infty} t; \ A_2(t) = \frac{A_2(0)}{\text{ch}\gamma_2 A_{1\infty} t}; \quad A_{1\infty} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} A_2(0);$$

$$в) \ A_1(t) = \frac{A_1(0)}{\text{ch}\gamma_1 A_{2\infty} t}; \quad A_2(t) = A_{2\infty} \text{th}\gamma_1 A_{2\infty} t; \quad A_{2\infty} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} A_1(0);$$

$$г) \ A_1(t) = A_1(0) \cos \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} t; \ A_2(t) = A_{2\max} \sin \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} t;$$

$$A_{2\max} = \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} A_1(0).$$

5.2

$$a) \ A_0^{(0)} = \left(\frac{\nu_1 \nu_2}{\gamma_1 \gamma_2}\right)^{\frac{1}{4}}; \quad б) \ A_0^{(0)} = \left(\frac{\nu_1 \nu_2}{\gamma_1 \gamma_2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$в) \ A_0^{(0)} = \left(\frac{\nu_1 \nu_2}{\gamma_1 \gamma_2}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad г) \ A_0^{(0)} = \frac{\nu_2}{\gamma_2} \left(\frac{\nu_1 \nu_2}{\gamma_1 \gamma_2}\right)^{\frac{1}{6}}.$$

5.3

$$a) A(t) = \frac{A^{(0)}}{\sqrt{1 - \left(1 - \left[\frac{A^{(0)}}{A(0)}\right]^2\right) e^{2\nu t}}}; \quad A^{(0)} = \sqrt{\frac{\nu}{\gamma}};$$

$$t_0 = -\frac{1}{2\nu} \ln \left[1 - \left(\frac{A^{(0)}}{A(0)} \right)^2 \right];$$

$$б) A(t) \underset{(t \rightarrow t_0)}{\approx} \frac{A^{(0)}}{A^{(0)}\nu t - \ln \left[\frac{A(0)}{A(0) - A^{(0)}} e^{-\frac{A^{(0)}}{A(0)}} \right]}; \quad A^{(0)} = \frac{\nu}{\gamma};$$

$$t_0 = \frac{1}{A^{(0)}\nu} \ln \left[\frac{A(0)}{A(0) - A^{(0)}} e^{-\frac{A^{(0)}}{A(0)}} \right]; \quad \text{при } A(0) \gg A^{(0)}$$

$$A(t) \approx \frac{A^{(0)}}{\nu A^{(0)}t - 0,5 \left(A^{(0)} / A(0) \right)^2}, \quad t_0 = A^{(0)} / 2\nu A(0);$$

$$в) A_-^{(0)} \approx \frac{\nu}{\gamma} \equiv A^{(0)}; \quad A_+^{(0)} \approx \frac{\gamma}{\beta} \equiv A_\infty \gg A^{(0)}.$$

$$\text{При } \frac{4\nu\beta}{\gamma^2} \ll 1 \quad t_0 \approx \frac{1}{A^{(0)}\nu} \ln \left[\frac{A(0)}{A(0) - A^{(0)}} e^{-\frac{A^{(0)}}{A(0)}} \right];$$

$$г) \text{ Для } A(0) \gg A^{(0)} \quad \frac{A^{(0)}}{A(0)} + \frac{1}{2} \ln \frac{A(t) - A^{(0)}}{A(t) + A^{(0)}} = (A^{(0)})^3 \gamma t + C;$$

$$C = \frac{A^{(0)}}{A(0)} + \frac{1}{2} \ln \frac{A(0) - A^{(0)}}{A(0) + A^{(0)}} < 0.$$

$$\text{При } A(t) \rightarrow \infty \text{ маємо } A(t) \approx \frac{A(0)}{(A^{(0)})^3 \gamma t + C}; \quad t_0 \approx -\frac{C}{(A^{(0)})^3 \gamma}.$$

5.4

$$A_{1,2}^2(t) = A_{00}^2 \frac{\gamma_{1,2}}{|\gamma_0|} \text{ch}^{-2} \lambda t; \quad A_0^2(t) = A_{00}^2 \left(1 - \text{ch}^{-2} \lambda t \right), \quad \lambda = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} A_{00}.$$

5.5

Вихідне рівняння $\frac{dm}{dt} = \frac{m}{\tau_2} e^{-t/\tau_2}$, $m(t) = m(0) \exp\left(\frac{\tau_2}{\tau_1} (1 - e^{-t/\tau_2})\right)$, де

$\tau_1 = 2,6$ роки, $\tau_2 = 8$ років. Залежність $m(t)$ описує нестійкість, у якої лінійна стадія (при $t / \tau_1 \leq 1$) змінюється нелінійною стадією (при $t / \tau_1 > 1$).

5.6

$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N$, де $\alpha, \beta > 0$; $N(t) = N(0)e^{(\alpha-\beta)t}$. Нестійкість виникає при $\alpha > \beta$, при $\alpha < \beta$ організми приречені на вимирання, при $\alpha = \beta$ їхня кількість залишається незмінною.

5.7

$\frac{dN}{dt} = \alpha N^2 - \beta N$, де $\alpha, \beta > 0$;

$$N(t) = N(0) \frac{N^{(0)}}{(N^{(0)} - N(0))e^{\beta N^{(0)}t}}, \quad N^{(0)} = \beta / \alpha.$$

Залежність $N(t)$ описує вибухову нестійкість.

5.8

$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \alpha(1 - \beta N)$, де $\beta > 0$;

$$N(t) = N(0) \frac{N_{\infty}}{N(0) + (N_{\infty} - N(0))e^{-\alpha t}}, \quad N_{\infty} = \frac{1}{\beta}.$$

Залежність $N(t)$ описує нестійкість, у якої лінійна стадія (при $\alpha t \leq 1$) змінюється нелінійною стадією (при $\alpha t > 1$).

5.9

$$N(t) = N(0) \frac{C}{C - N(0)t}.$$

Залежність $N(t)$ визначає вибухову нестійкість; момент "вибуху" чисельності населення $t_0 = C / N(0)$, $N(0) = C / 2026$, а $t_0 = 2026$ р.

5.10

$$N(t) = \frac{N_{\infty}}{\pi} \operatorname{arccotg} \frac{\tau_0 - t}{\tau},$$

де $N_\infty = \pi C / \tau \approx 11.4$ млрд людей. Залежність $N(t)$ описує нестійкість, у якої лінійна стадія (при $(\tau_0 - t) / \tau > 0$) змінюється нелінійною стадією (при $(\tau_0 - t) / \tau < 0$).

5.11

$$P(t) = \frac{P_0}{(1 + \beta P_0)e^{-\alpha_0 t} - \beta P_0}.$$

При $\beta < 0$

$$P(t) = \frac{P_0 P_\infty}{P_0 + (P_\infty - P_0)e^{-\alpha_0 t}}$$

має місце нестійкість із стабілізацією P на рівні $P_\infty = \frac{1}{|\beta|}$. При $\beta > 0$ має місце вибухова нестійкість з $t_0 = \alpha_0^{-1} \ln(1 + \beta^{-1} P_0^{-1})$ де $t_0 \approx 60$ років. При $\beta = 0$ маємо $P(t) = P_0 e^{\alpha_0 t}$, тобто нестійкість.

5.12

$$P(t) = \frac{P_0}{(1 + \beta P_0)e^{-\alpha t} - \beta P_0}.$$

При $\beta < 0$

$$P(t) = \frac{P_0 P_\infty}{P_0 + (P_\infty - P_0)e^{-\alpha t}}$$

має місце нестійкість із стабілізацією P на рівні $P_\infty = \frac{1}{|\beta|} \approx 100$ ГВт. При $\beta > 0$ має місце вибухова нестійкість з $t_0 = \alpha_0^{-1} \ln(1 + \beta^{-1} P_0^{-1})$, де $t_0 \approx 691$ років. При $\beta = 0$ маємо $P(t) = P_0 e^{\alpha_0 t}$, тобто нестійкість

5.13

$$n(t) = \frac{n_0}{(1 + \beta n_0)e^{-\alpha_2 t} - \beta n_0}, \text{ де } \alpha_2 = \alpha_0 - \beta, \beta = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}. \text{ Залежність } n(t)$$

описує вибухову нестійкість з $t_0 = \alpha_2^{-1} \ln(1 + \beta^{-1} n_0^{-1})$, де $t_0 \approx 113$ років.

5.14

$$S(t) = \frac{S_0}{(1 + \beta S_0) e^{\alpha(t-t_0)} - \beta S_0};$$

- а) $t-t_0 = 64,7$ років;
 б) $t-t_0 = 51,8$ років;
 в) $t-t_0 = 606$ років;
 г) $t-t_0 = 2217$ років.

5.15

$$T(t) = (1 + \beta T_0) e^{\alpha \beta (t-t_0)} - 1;$$

- а) $T = 6$ К;
 б) $T = 12$ К;
 в) $T = 18$ К;
 г) $T = 24$ К.

5.16

$$n(t) = \frac{n_0}{n_0 + (1 - n_0)e^x}, \quad x = \frac{t - t_0}{\tau}.$$

Закон зміни описує нестійкість із насиченням.

- а) $n(t_2) = 0,5$ при $t_2 = 2001$ р.; $n(t_3) = 0,9$ при $t_3 = 2006$ р.;
 $n(t_4) = 0,99$ при $t_4 = 2012$ р.
 б) $n(t_2) = 0,5$ при $t_2 = 2003$ р.; $n(t_3) = 0,9$ при $t_3 = 2009$ р.;
 $n(t_4) = 0,99$ при $t_4 = 2017$ р.
 в) $n(t_2) = 0,5$ при $t_2 = 2012$ р.; $n(t_3) = 0,9$ при $t_3 = 2021$ р.;
 $n(t_4) = 0,99$ при $t_4 = 2031$ р.
 г) $n(t_2) = 0,5$ при $t_2 = 2017$ р.; $n(t_3) = 0,9$ при $t_3 = 2028$ р.;
 $n(t_4) = 0,99$ при $t_4 = 2040$ р.

Перелом настає при $t = t_1$, при цьому $n(t_1) = 0,5$.

6.1

- а) $E_t = 4,7 \cdot 10^5$ В/м, $\Pi = 2,9 \cdot 10^8$ Вт/м², $P = 290$ Вт;
 б) $E_t = 4,7 \cdot 10^6$ В/м, $\Pi = 2,9 \cdot 10^{10}$ Вт/м², $P = 58$ кВт;
 в) $E_t = 1,5 \cdot 10^6$ В/м, $\Pi = 2,9 \cdot 10^9$ Вт/м², $P = 15$ кВт;
 г) $E_t = 2,4 \cdot 10^6$ В/м, $\Pi = 7,5 \cdot 10^9$ Вт/м², $P = 75$ кВт.

6.2

а) $E_t = 1,5 \cdot 10^8 \text{ В/м}$, $\Pi = 2,9 \cdot 10^{13} \text{ Вт/м}^2$, $P = 29 \text{ МВт}$;

б) $E_t = 1,1 \cdot 10^8 \text{ В/м}$, $\Pi = 1,6 \cdot 10^{13} \text{ Вт/м}^2$, $P = 32 \text{ МВт}$;

в) $E_t = 1,5 \cdot 10^8 \text{ В/м}$, $\Pi = 2,9 \cdot 10^{13} \text{ Вт/м}^2$, $P = 150 \text{ МВт}$;

г) $E_t = 1,5 \cdot 10^8 \text{ В/м}$, $\Pi = 2,9 \cdot 10^{13} \text{ Вт/м}^2$, $P = 290 \text{ МВт}$.

6.3

$E_s = 4,75 \cdot 10^8 \text{ В/м}$, $\Pi = 2,9 \cdot 10^{14} \text{ Вт/м}^2$, $P = 290 \text{ МВт}$.

6.4

$E_s = 1,1 \cdot 10^{11} \text{ В/м}$, $\Pi = 1,4 \cdot 10^{19} \text{ Вт/м}^2$, $P = 14 \text{ ТВт}$.

6.5

$E_s = 6,6 \cdot 10^{11} \text{ В/м}$, $\Pi = 5,7 \cdot 10^{20} \text{ Вт/м}^2$, $P = 0,6 \text{ ПВт}$.

6.6

а) $E_a = 1,4 \cdot 10^{11} \text{ В/м}$, $\Pi = 2,5 \cdot 10^{19} \text{ Вт/м}^2$, $P = 25 \text{ ТВт}$;

б) $E_a = 3,5 \cdot 10^{10} \text{ В/м}$, $\Pi = 1,56 \cdot 10^{18} \text{ Вт/м}^2$, $P = 1,56 \text{ ТВт}$;

в) $E_a = 8,75 \cdot 10^9 \text{ В/м}$, $\Pi = 10^{17} \text{ Вт/м}^2$, $P = 0,1 \text{ ТВт}$;

г) $E_a = 3,9 \cdot 10^9 \text{ В/м}$, $\Pi = 1,9 \cdot 10^{16} \text{ Вт/м}^2$, $P = 19 \text{ ГВт}$;

6.7

$r_a \approx 5,2 \cdot 10^{-11} \text{ м}$, $E_a = 5,2 \cdot 10^{11} \text{ В/м}$, $\Pi = 3,5 \cdot 10^{20} \text{ Вт/м}^2$,

$P = 0,35 \text{ ПВт}$;

6.8

$\frac{E_a}{E_r} = \frac{E_e}{E_\omega} \alpha^3$, де $E_e = mc^2$ – енергія спокою електрона, $E_\omega = \hbar\omega$ – енер-

гія кванта,

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} - \text{ стала тонкої структури.}$$

6.9

$$\frac{E_a}{E_v} = \alpha^3, \text{ де } \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} - \text{ стала тонкої структури.}$$

6.10

$$\frac{E_r}{E_v} = \frac{E_\omega}{E_e}, \text{ де } E_\omega = \hbar\omega - \text{ енергія кванта, } E_e = mc^2 - \text{ енергія спокою еле-}$$

ктрона.

6.11

$$\text{а) } E_r = 1,7 \cdot 10^{11} \text{ В/м, } \Pi = 3,8 \cdot 10^{19} \text{ Вт/м}^2, P = 38 \text{ ТВт};$$

$$\text{б) } E_r = 1,7 \cdot 10^{12} \text{ В/м, } \Pi = 3,8 \cdot 10^{21} \text{ Вт/м}^2, P = 3,8 \text{ ПВт};$$

$$\text{в) } E_r = 1,7 \cdot 10^{13} \text{ В/м, } \Pi = 3,8 \cdot 10^{23} \text{ Вт/м}^2, P = 3,8 \text{ ЕВт} = 3,8 \cdot 10^{18} \text{ Вт};$$

$$\text{г) } E_t = 8,5 \cdot 10^{13} \text{ В/м, } \Pi = 9,4 \cdot 10^{24} \text{ Вт/м}^2, P = 94 \text{ ЕВт} = 9,4 \cdot 10^{19} \text{ Вт.}$$

6.12

$$\text{а) } E_v = 2,3 \cdot 10^{17} \text{ В/м, } \Pi = 6,9 \cdot 10^{31} \text{ Вт/м}^2, P = 6,9 \cdot 10^{25} \text{ Вт};$$

$$\text{б) } E_v = 2,3 \cdot 10^{17} \text{ В/м, } \Pi = 6,9 \cdot 10^{31} \text{ Вт/м}^2, P = 6,9 \cdot 10^{24} \text{ Вт};$$

$$\text{в) } E_v = 2,3 \cdot 10^{17} \text{ В/м, } \Pi = 6,9 \cdot 10^{31} \text{ Вт/м}^2, P = 6,9 \cdot 10^{23} \text{ Вт};$$

$$\text{г) } E_v = 2,3 \cdot 10^{17} \text{ В/м, } \Pi = 6,9 \cdot 10^{31} \text{ Вт/м}^2, P = 6,9 \cdot 10^{22} \text{ Вт.}$$

6.13

$$\text{а) } E = 10^5 \text{ Дж, } \epsilon_e = 3,3 \cdot 10^{16} \text{ Дж/м}^3, \Pi = 10^{25} \text{ Вт/м}^2;$$

$$\text{б) } E = 10^6 \text{ Дж, } \epsilon_e = 3,3 \cdot 10^{16} \text{ Дж/м}^3, \Pi = 10^{25} \text{ Вт/м}^2;$$

$$\text{в) } E = 10^5 \text{ Дж, } \epsilon_e = 3,3 \cdot 10^{17} \text{ Дж/м}^3, \Pi = 10^{26} \text{ Вт/м}^2;$$

$$\text{г) } E = 10^8 \text{ Дж, } \epsilon_e = 3,3 \cdot 10^{17} \text{ Дж/м}^3, \Pi = 10^{26} \text{ Вт/м}^2.$$

6.14

$$E = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ Дж}, \varepsilon_e = 3,9 \cdot 10^{34} \text{ Дж/м}^3, \omega = 5,1 \cdot 10^{23} \text{ с}^{-1}.$$

6.15

$$\text{а) } A_1 = \frac{A_{10}A_{2\infty}}{A_{20}e^{x/L} + A_{10}(\delta_2 / \delta_1)} \approx \frac{A_{10}A_{2\infty}}{A_{20}e^{x/L} + A_{2\infty}}, L = \frac{1}{\delta_1 A_{2\infty}} = \frac{1}{\delta_2 A_{10}},$$

$$A_{2\infty} = A_{20} + \frac{\delta_2}{\delta_1} A_{10}, \eta = \left(\frac{A_{2\infty}}{A_{10}} \right)^2 = \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^2 \approx 0,5.$$

$$\text{б) } A_1 = A_{10} \cos \frac{x}{L}, A_2 = A_{2\infty} \sin \frac{x}{L}, L = \frac{1}{\sqrt{\delta_1 \delta_2} A_0},$$

$$A_{2\infty}^2 = A_{20}^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} A_{10}^2, \eta = \left(\frac{A_{2\infty}}{A_{10}} \right)^2 = \frac{\delta_2}{\delta_1} = 0,7.$$

Доцільно, щоб $\frac{x}{L} = \frac{\pi}{2}$, тобто довжина робочого тіла $L_0 = \frac{\pi}{2} L$.

$$\text{в) } A_1 = A_{10} \sqrt{\left(1 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \frac{A_{20}^2}{A_{10}^2} \right) \left(1 - \frac{A_{20}^2}{A_{20}^2 + (A_{2\infty}^2 - A_{20}^2) e^{-2x/L}} \right)} \approx$$

$$\approx A_{10} \sqrt{1 - \frac{A_{20}^2}{A_{20}^2 + (A_{2\infty}^2 - A_{20}^2) e^{-2x/L}}}, L = \frac{1}{\delta_1 A_{2\infty}^2},$$

$$A_2 = \frac{A_{20}A_{2\infty}}{\sqrt{A_{20}^2 + (A_{2\infty}^2 - A_{20}^2) e^{-2x/L}}}, A_{2\infty}^2 = A_{20}^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} A_{10}^2,$$

$$\eta = \left(\frac{A_{2\infty}}{A_{10}} \right)^2 = \left(\frac{A_{20}}{A_{10}} \right)^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \approx \frac{\delta_2}{\delta_1} \approx 0,7.$$

$$\text{г) } \left(\frac{A_1}{A_{1\infty} - A_1} \right)^2 \exp \left\{ \frac{(2A_1 - A_{1\infty}) A_{1\infty}}{A_1 (A_{1\infty} - A_1)} \right\} =,$$

$$= \left(\frac{A_{10}}{A_{1\infty} - A_{10}} \right)^2 \exp \left\{ \frac{(2A_{10} - A_{1\infty}) A_{1\infty}}{A_{10} (A_{1\infty} - A_{10})} \right\} e^{-x/L_1}$$

$$A_{1\infty} = A_{10} + \frac{\delta_1}{\delta_2} A_{20}, L_1 = \frac{\delta_1}{\delta_2^2 A_{1\infty}^3},$$

$$\left(\frac{A_2}{A_{2\infty} - A_2} \right)^2 \exp \left\{ \frac{(2A_2 - A_{2\infty}) A_{2\infty}}{A_2 (A_{2\infty} - A_2)} \right\} =,$$

$$= \left(\frac{A_{20}}{A_{2\infty} - A_{20}} \right)^2 \exp \left\{ \frac{(2A_{20} - A_{2\infty}) A_{2\infty}}{A_{20} (A_{20} - A_{2\infty})} \right\} e^{x/L_2},$$

$$A_{2\infty} = A_2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} A_{10}, L_2 = \frac{\delta_2}{\delta_2^2 A_{2\infty}^3},$$

$$\eta = \left(\frac{A_{2\infty}}{A_{10}} \right)^2 = \left(\frac{A_{20}}{A_{10}} + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^2 \approx \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^2 \approx 0,5.$$

6.16

$$\text{a) } \eta = \left(\frac{A_{2\infty}}{A_{10}} \right)^2 = \left[\left(\frac{A_{2\infty}}{A_{10}} \right)^3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right]^{2/3} \approx \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^{2/3} \approx 0,86.$$

$$\text{б) } \eta = \left(\frac{A_{2\infty}}{A_{10}} \right)^2 = \left[\left(\frac{A_{2\infty}}{A_{10}} \right)^3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right]^{2/3} \approx \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^{2/3} \approx 0,86.$$

$$\text{в) } \eta = \left(\frac{A_{2\infty}}{A_{10}} \right)^2 = \left[\left(\frac{A_{2\infty}}{A_{10}} \right)^3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right]^{2/3} \approx \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^{2/3} \approx 0,86.$$

$$\text{г) } \eta = \left(\frac{A_{2\infty}}{A_{10}} \right)^2 = \left[\left(\frac{A_{20}}{A_{10}} \right)^4 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right]^{1/2} \approx \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^{1/2} \approx 0,89.$$

7.1

$$Q(t) = Q_0 \sin \omega_p t; I(t) = -Q_0 \omega_p \cos \omega_p t = Q_0 \omega_p \cos(\omega_p t - \pi);$$

$$\vec{j}(t) = \vec{j}_0 \cos(\omega_p t - \pi); \vec{v}(t) = \vec{v}_0 \cos(\omega_p t - \pi); \vec{v}_0 = \frac{\vec{j}_0}{eN};$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\omega_p t); \vec{E}_0 = \frac{\vec{j}_0}{\epsilon_0 \omega_p}.$$

7.2

$$E_{kp} \approx E_p \frac{f^2}{f_{p0} \nu_0} \frac{\lambda}{r_0}; E_p^2 = \frac{3kT_{e0} m \delta_0 (\omega^2 + \nu_0^2)}{e^2};$$

$$P_{kp} = \frac{E_p^2 S}{240\pi}; R_\phi \approx r_0 \frac{\omega^2}{\omega_{p0} \nu_0} \frac{E_p}{E_{kp}}.$$

7.3

$$E(x) = \frac{E(0)}{\sqrt{\left(\frac{E(0)}{E_c}\right)^2 + \left[1 - \left(\frac{E(0)}{E_c}\right)^2\right] e^{2k_0}}};$$

$$P(x) = \frac{e^{k_0}}{\sqrt{\left(\frac{E(0)}{E_c}\right)^2 + \left[1 - \left(\frac{E(0)}{E_c}\right)^2\right] e^{2k_0}}}.$$

7.4

$$E(x) = \frac{E(0)e^{-k_0}}{\sqrt{1 + \frac{E^2(0)}{E_p^2}(1 - e^{-2k_0})}};$$

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{E^2(0)}{E_p^2}(1 - e^{-2k_0})}}.$$

7.5

$$4k_0 \gg 1; \quad E(x) \approx E(0)e^{\frac{E^2(0)}{4E_p^2}e^{-k_0}}; \quad P(x) \approx e^{\frac{E^2(0)}{4E_p^2}}.$$

7.6

$$\Delta\varphi(x) = -\frac{1}{4} \frac{\omega}{c} L_0 \frac{\omega_{p0}^2 \nu_0^2}{\omega^4} \left[\frac{E^2 - E^2(0)}{E_p^2} + \ln \frac{E^2 / E_p^2 + 1}{E^2(0) / E_p^2 + 1} \right], \quad L_0 = \frac{1}{\alpha_0};$$

$$\Delta\varphi|_{x \rightarrow \infty} = \frac{1}{4} \frac{\omega}{c} L_0 \frac{\omega_{p0}^2 \nu_0^2}{\omega^4} \left[\frac{E^2(0)}{E_p^2} + \ln \left(\frac{E^2(0)}{E_p^2} + 1 \right) \right].$$

7.7

$$\Delta\varphi(x) = \frac{1}{4} \frac{\omega}{c} L_0 \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^4} \ln \frac{1 - E^2 / E_c^2}{1 - E^2(0) / E_c^2}, \quad L_0 = \frac{1}{\alpha_0};$$

$$\Delta\varphi|_{x \rightarrow \infty} = -\frac{1}{4} \frac{\omega}{c} L_0 \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^4} \ln \left(1 - \frac{E^2(0)}{E_c^2} \right).$$

7.8

$$\varepsilon_{\text{нл}} = \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} \left(1 - e^{-E^2/E_c^2} \right) > 0.$$

7.9

У плазмі T_e збільшилася приблизно у 101 раз.

7.10

Коефіцієнт прилипання подвоївся, а концентрація електронів зменшилася вдвічі.

7.11

Зменшилася в $e^4 \approx 55$ разів.

7.12

Концентрація електронів зменшилася на третину.

7.13

Пробій плазми описується наступним співвідношенням:

$$N(t) = \frac{N_0 N_\infty}{N_0 + (N_\infty - N_0) e^{-\nu_i t}}, \text{ де } N_\infty = \frac{\nu_i}{\alpha_r} = 10^{22} \text{ м}^{-3}. \text{ Час становлення}$$

N при пробі $t_N = \nu_i^{-1} = 1 \text{ нс}$.

Релаксація концентрації електронів описується таким співвідношенням:

$$N(t) = \frac{N_m}{1 + N_m \alpha_r t}, \text{ де } N_m = N(0). \text{ Час релаксації концентрації електро-}$$

нів $t_{Nr} = (N_m \alpha_r)^{-1}$. При $N_m = N_\infty$ маємо $t_{Nr} = 1 \text{ нс}$.

7.14

Рівняння для концентрації електронів має вигляд:

$$\frac{dN}{dt} = q_e - \beta N_n^2 N \text{ або } \frac{dN}{dt} = q_e - \beta_r N, \text{ де } \beta_r = \beta N_n^2.$$

Стационарне значення $N_\infty = N_0 \frac{\beta_0}{\beta_\infty}$, $\beta_0 = q_e / N_0$. Розв'язок диференці-

ального рівняння має вигляд $N(t) = N_\infty - (N_\infty - N_0) e^{-t/t_N}$, де $t_N = \beta_{r0}^{-1}$ –

час становлення N . Релаксація N описується рівнянням $\frac{dN}{dt} = q_e - \beta_{r0} N$, де

$N(0) = N_m$. Його розв'язок має вигляд: $N(t) = N_0 + (N_m - N_0) e^{-t/t_N}$.

7.15

$N / N_0 = 0.5$. а) $N_0 = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^{-3}$, $t_N = 1,1 \text{ нс}$; б) $N_0 = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-3}$, $t_{Nr} = 11 \text{ мкс}$; в) $N_0 = 10^8 \text{ м}^{-3}$, $t_N = 0,1 \text{ с}$.

8.1

- а) збільшення T_e біля 41%;
- б) збільшення T_e біля 33%;
- в) збільшення T_e в 13,6 рази.

8.2

Відносне збільшення T_e вдень близько до 2%, вночі – 62%. Вночі ефект крос-модуляції виражений сильно.

8.3

Значення $\mu_{\Omega \max} / \mu \approx 0,5 E_0^2 / E_p^2 \approx 0,35$, тобто ефект саомодуляції є істотним.

8.4

Відношення E_0^2 / E_p^2 вдень дорівнює 1%, вночі – 7.3%. Ефекти крос-модуляції та саомодуляції виражені слабо.

8.5

Ні, оскільки напруженість поля пробою $E_i \approx 156 \text{ В/м}$, а амплітуда поля радіохвилі 8 мВ/м вдень і 22 мВ/м вночі.

8.6

$$\mu_{\Omega \max} = 0,5 \text{ при } \omega_{1,2}^2 \gg \nu_0^2, \mu_{\Omega \max} = -0,5 \text{ при } \omega_{1,2}^2 \ll \nu_0^2.$$

8.7

$$f_{\max} \approx 900 \text{ ГГц.}$$

8.8

Значення $E_0^2 / E_p^2 \approx 8.7$. При цьому виникає сильне нагрівання електронів, порушення гідростатистичної рівноваги, фокусування пучка радіохвиль, самофокусувальна нестійкість, розвал пучка й інші ефекти.

8.9

$$\text{При } f \approx 30 \text{ МГц, } \sigma \approx 2,4 \cdot 10^7 \text{ м}^2, \text{ а при } f \approx 300 \text{ МГц } \sigma \approx 2,4 \cdot 10^4 \text{ м}^2.$$

8.10

$$R_{\max} \approx 2\sqrt{2R_E z_s} \approx 4000 \text{ км, де } R_E \approx 6400 \text{ км – радіус Землі.}$$

8.11

Вказівка. Прийняти, що відповідні системи використовують смугу частот на один канал 300 Гц, 9 кГц, 50 кГц, 9 МГц і 3 кГц. Для ДНЧ, НЧ, СЧ, ВЧ, УВЧ, ДВЧ, НВЧ, КВЧ і ГВЧ діапазонів частота збільшується на порядок у кожному діапазоні від 3 кГц до 300 ГГц.

8.12

$$\text{Середня потужність } P_0 = P_i \tau F = 10 \text{ кВт, } P = \frac{P_0}{\eta} = 50 \text{ кВт.}$$

8.13

- а) $P_r = 7.3 \cdot 10^{-15} \text{ Вт};$
- б) $P_r = 1.7 \cdot 10^{-15} \text{ Вт};$
- в) $P_r = 1.3 \cdot 10^{-15} \text{ Вт};$
- г) $P_r = 5.5 \cdot 10^{-16} \text{ Вт}.$

8.14

$$l_a \approx 10 \text{ км.}$$

8.15

$$B_\Omega \approx 4 \text{ нТл.}$$

8.16

- а) $T_e / T_{e0} \approx 1.03;$
- б) $T_e / T_{e0} = 1.3;$
- в) $T_e / T_{e0} \approx 4;$
- г) $T_e / T_{e0} \approx 1.3.$

8.17

- а) $100 \text{ км}^2 = 10 \times 10 \text{ км}^2;$
- б) $250 \text{ км}^2 \approx 16 \times 16 \text{ км}^2;$
- в) $33 \text{ км}^2 \approx 5.7 \times 5.7 \text{ км}^2;$
- г) $400 \text{ км}^2 = 20 \times 20 \text{ км}^2.$

8.18

- а) $S = 10^5 \text{ м}^2 \approx 320 \times 320 \text{ м}^2, \Delta\alpha = 3.2 \cdot 10^{-4};$
- б) $S = 8.3 \cdot 10^5 \text{ м}^2 \approx 0.9 \times 0.9 \text{ км}^2, \Delta\alpha = 8.7 \cdot 10^{-5};$
- в) $S = 4.8 \cdot 10^5 \text{ м}^2 \approx 690 \times 690 \text{ м}^2, \Delta\alpha = 1.4 \cdot 10^{-4};$
- г) $S = 4.3 \cdot 10^5 \text{ м}^2 \approx 655 \times 655 \text{ м}^2, \Delta\alpha = 1.4 \cdot 10^{-4}.$

8.19

- а) $L = 4.3 \text{ км}$, $S \approx 18.7 \text{ км}^2$; б) $L = 8.6 \text{ км}$, $S \approx 74.6 \text{ км}^2$;
в) $L = 21.6 \text{ км}$, $S \approx 467 \text{ км}^2$; г) $L = 432 \text{ м}$, $S \approx 0.19 \text{ км}^2$.

8.20

- а) 9.5%; б) 63%; в) 86%; г) 98%.

9.1

- а) $\overline{A(t)} = \overline{A_0} e^{\lambda t}$; $\overline{A^2(t)} = \left(\sigma_0^2 - \overline{A_0}^2 \right) e^{2\lambda t}$; $\sigma_A^2(t) = \sigma_0^2 e^{2\lambda t}$;
б) $\overline{A(t)} = \overline{A_0} \text{ch}^{-1} \xi$; $\overline{A^2(t)} = \left(\sigma_0^2 - \overline{A_0}^2 \right) \text{ch}^{-2} \xi$; $\sigma_A^2(t) = \sigma_0^2 \text{ch}^{-2} \xi$;
в) $\overline{A(t)} = \overline{A_0} \text{ch}^{-2} \xi$; $\overline{A^2(t)} = \left(\sigma_0^2 - \overline{A_0}^2 \right) \text{ch}^{-4} \xi$; $\sigma_A^2(t) = \sigma_0^2 \text{ch}^{-4} \xi$;
г) $\overline{A(t)} = \overline{A_0} e^{-\xi^2}$; $\overline{A^2(t)} = \left(\sigma_0^2 - \overline{A_0}^2 \right) e^{-2\xi^2}$; $\sigma_A^2(t) = \sigma_0^2 e^{-2\xi^2}$.

9.2

- а) $x(t) = e^{-t} \int_0^t e^{t'} (1 + \xi(t')) dt'$; $\overline{x(t)} = 1 - e^{-t}$;
б) $x(t) = e^t \int_0^t \xi(t') e^{-t'} dt'$; $\overline{x(t)} = e^t \int_0^t \overline{\xi(t')} e^{-t'} dt' = 0$;
в) $x(t) = e^{2t} \int_0^t (1 + \xi(t')) e^{-2t'} dt'$; $\overline{x(t)} = \frac{1}{2} (e^{2t} - 1)$;
г) $x(t) = e^{-t} \int_0^t e^{t'} (1 + \xi(t')) dt'$; $\overline{x(t)} = 1 - e^{-t}$.

9.3

- а) $x(t) = e^{\beta t} \int_0^t \xi(t') e^{-\beta t'} dt'$; $\beta = e^{-\frac{1}{2}\sigma_x^2}$;
б) $x(t) = e^{\beta t} \int_0^t \xi(t') e^{-\beta t'} dt'$; $\beta = 3\sigma_x^2$;
в) $x(t) = \alpha t + \int_0^t \xi(t') dt'$; $\alpha = 1 + \sigma_x^2$;

$$\text{г)} \quad x(t) = \alpha t + \int_0^t \xi(t') dt'; \quad \alpha = e^{-\sigma_x^2/2};$$

9.4

$$\text{а)} \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = \cos \left(\bar{x} + e^{-t \sin \bar{x}} \cdot \int_0^t [\xi(t') - \bar{\xi}(t')] e^{t' \sin \bar{x}} dt' \right) + \bar{\xi}(t);$$

$$\text{б)} \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = \sin \left(\bar{x} + e^{-t \cos \bar{x}} \cdot \int_0^t [\xi(t') - \bar{\xi}(t')] e^{t' \cos \bar{x}} dt' \right) + \bar{\xi}(t);$$

$$\text{в)} \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = \left(\bar{x} + e^{3\bar{x}^2 t} \cdot \int_0^t [\xi(t') - \bar{\xi}(t')] e^{-3\bar{x}^2 t'} dt' \right)^2 + \bar{\xi}(t);$$

$$\text{г)} \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = 1 + \frac{1}{4\bar{x}} (1 - e^{-4\bar{x}t}) + \bar{\xi}(t).$$

10.1

$$\text{а), б), в)} \quad d_H = \frac{1}{2} \quad \text{г)} \quad d_H = \frac{\ln 3}{\ln 5}.$$

10.2

$$\text{а), б)} \quad d_H = \frac{\ln 4}{\ln 3}; \text{ периметр } p = \infty; \text{ в), г)} \quad d_H = \frac{\ln 5}{\ln 3}; \text{ периметр } p = \infty;$$

$$\text{д)} \quad d_H = \frac{\ln 2m}{\ln m}, \text{ якщо } m - \text{ парне}; \quad d_H = \frac{\ln(2m-1)}{\ln m}, \text{ якщо } m - \text{ непарне},$$

периметр $p = \infty$.

10.3

$$d_H = \frac{\ln(m-k)}{\ln m}.$$

10.4

$$\text{а)} \quad d_H = 1, \quad d_T = 1; \quad \text{б)} \quad d_H = \frac{\ln 7}{\ln 3}, \quad d_T = 1.$$

$$\text{в)} \quad d_H = \frac{\ln 5}{\ln 3}, \quad d_T = 1, \quad \text{г)} \quad d_H = \frac{\ln 4}{\ln 3}, \quad d_T = 1.$$

10.5

$$d_H = \frac{\ln 26}{\ln 3}, \quad d_T = 2.$$

10.6

$$d_H = \frac{\ln(3m-1)}{\ln k}, \quad d_T = m-1.$$

10.7

$$\begin{aligned} a) \quad x_1^* = 0, \quad x_2^* = -1, \quad \bar{b}) \quad x_1^* = 0, \quad x_1^* = 0, \\ \bar{e}) \quad x_1^* = 0, \quad x_2^* = 1/2, \quad \bar{z}) \quad x_1^* = 0, \quad x_2^* = 3/4. \end{aligned}$$

10.8

$$0 \leq \lambda < \infty.$$

10.9

$$\begin{aligned} a) \quad T_\infty = \frac{\alpha}{\beta}; \quad v_0 = 2\sqrt{\kappa(\alpha - 2\beta T_0)}; \\ \bar{b}) \quad T_\infty = \frac{\beta}{\alpha}; \quad v_0 = 2\sqrt{\kappa(2\alpha T_0 - \beta)}; \\ \bar{e}) \quad T_\infty = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}; \quad v_0 = 2\sqrt{\kappa(3\alpha T_0^2 - \beta)}; \\ \bar{z}) \quad T_\infty = \frac{\beta}{\alpha}; \quad v_0 = 2\sqrt{2\kappa T_0(2\alpha T_0^2 - \beta)}. \end{aligned}$$

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Лазоренко Олег Валерійович, Чорногор Леонід Феоктистович, Нелінійна
радіофізика. *Збірник задач. Підручник.*

Редактор

Коректори

Комп'ютерна верстка

Підписано до друку __. __. 2023 р. Формат 60х84 1/16. Папір офсетний.

Друк ризографічний. Ум. др. арк.. 13. Обл. – вид. арк.

Тираж 300 пр.

61022, Харків, м. Свободи, 4.

Харківський національний університет

імені В. Н. Каразіна

Організаційно-видавничий відділ НМЦ
